Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 11 - Lösungen

Abgabetermin: 24. Januar 2014 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Ergodensatz)

Sei $1 < p < \infty$ und $T : l^p \to l^p, (Tx)_n = x_{n+1}$ der Shift-Operator. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} T^k x}{N} = 0 \qquad (x \in l^p).$$

Was können Sie über die linke Seite im Fall $p = 1$ und $p = \infty$ sagen?

Lösung:

Für $1 < p < \infty$ ist l^p reflexiv und die Norm des Shiftoperators und seiner Potenzen ist 1 . Nach Ergodensatz konvergiert die Operator gegen die Projektion auf $N(I-T)$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N(I-T)$, das heißt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_{n+1} - a_n|^p = 0.$$

dann ist (a_n) eine konstante Folge und daher 0 .
Für $p = \infty$ ist der Unterraum der konstante Folgen $=: U \subset l^\infty$ enthalten. Für solche Folgen wirkt der Shift-Operator wie die Identität, dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} T^k u}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} u}{N} = u \qquad (u \in U).$$

Für $p = 1$ betrachte die Folge $x^{(n)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} T^k a}{N}$. Es gilt dann $\|x^{(n)}\| \le \|a\|$, und punktweise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{l+k}}{n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+l} = 0 \qquad (l \in \mathbb{N}).$$

Mehr kann man zunächst nicht aussagen (beachte Aufgabe 3 des letzten Zettels).

Aufgabe 2 (Gegenbeispiel anschließend an 16.7)

Sei $E := C([0,1],\mathbb{R})$, sowie

$$C := \left\{ f \in E : \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt = 1 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass C abgeschlossen und konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass $\|g\|_\infty > \inf_{f\in C} \|f\|_\infty$ $(g \in C)$ gilt.

Lösung:

a) Sei (f_n) Folge in C mit $f_n \to_{\|\cdot\|_\infty} f$, dann folgt

$$\int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} f_n(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f_n(t)\,dt = 1,$$

da aus gleichmäßiger Konvergenz stets L^1-konvergenz folgt.
Seien $f, g \in E$ und $\lambda \in [0,1]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{1/2} (\lambda f + (1-\lambda)g)(t)\,dt - \int_{1/2}^1 \lambda f + (1-\lambda)g(t)\,dt \\
=&\lambda \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt + (1-\lambda)\int_0^{1/2} g(t)\,dt - \int_{1/2}^1 g(t)\,dt \\
=&\lambda + (1-\lambda) = 1.
\end{aligned}$$

Daher gilt $\lambda f + (1-\lambda)g \in C$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt && (1)\\
&\leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Der Raum $C' := \{f \in L^2([0,1]) : \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^1 f(t)\,dt = 1\}$ ist auch bezüglich L^2 abgeschlossen (nachrechnen), daher gibt es ein eindeutiges Elemen $\chi' \in C'$, welches die L^2-Norm minimiert. Die Funktion

$$\chi'(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2) \\ 0 & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

ist in C' und hat minimale L^2-Norm 1, da es nach (1) keine kleinere Norm geben kann. Angenommen es gibt $\chi \in C$, mit $\|\chi\|_\infty = 1$, dann folgt $\|\chi\|_{L^2} = 1$ mittels 1. Da der Minimierer eindeutig ist, folgt, $\chi = \chi'$, was aber im Widerspruch zu χ stetig steht. Daher gibt es kein $f \in C$ mit $\|f\| = 1$. Betrachte nun die Folge

$$\chi_n(x) := \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ -(n+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) & x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right] \\ -1 - \frac{1}{n} & x \in \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Es gilt $\chi_n \in C \quad (n \in \mathbb{N})$, sowie $\|\chi_n\| = 1 + 1/n$. Daher ist $\inf\limits_{f \in C} \|f\|_\infty = 1 < \|g\|_\infty \quad (g \in C)$.

Aufgabe 3 (Fortsetzungssatz für Hilberträume)

Beweisen Sie den Fortsetzungssatz linearer Funktionale auf abgeschlossenen Unterräumen von Hahn-Banach für Hilberträume mittels des Darstellungssatzes von Fréchet-Riesz. Genauer: Sei $U \subseteq H$ abgeschlossener Untervektorraum und $\phi \in U'$. Dann gibt es ein lineares Funktional $\psi \in H'$ mit $\psi(x) = \phi(x) \quad (x \in U)$ und $\|\phi\|_{U'} = \|\psi\|_{H'}$.

Lösung:

Sei $\phi \in U'$. Da U' ein Hilbertraum ist, gibt es ein $u_\phi \in U$ mit $\phi(u) = \langle u, u_\phi \rangle$ nach Darstellungssatz von Fréchet-Riesz. Definiere dann $\psi \in H'$ durch $\psi(x) = \langle x, u_\phi \rangle$ für $x \in H$.

Aufgabe 4 (Hilberträume)

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $A \in L(H)$. Ein Element $v \in H \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $Av = \lambda v$ gilt. Sei A symmetrisch, zeigen Sie:

a) Eigenwerte sind reell.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

Lösung:

Es gilt:

$$\lambda = \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \overset{A \text{ symmetrisch}}{=} \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} \overset{\langle v,w \rangle = \overline{\langle w,v \rangle}}{=} \frac{\overline{\langle Av, v \rangle}}{\langle v, v \rangle} = \overline{\lambda}$$

Sei v Eigenvektor zu λ und w Eigenvektor zu μ mit $\mu \neq \lambda$. Dann gilt:

$$\langle v, w \rangle = \frac{\mu \langle v, w \rangle - \lambda \langle v, w \rangle}{\mu - \lambda} = \frac{\langle Av, w \rangle - \langle v, Aw \rangle}{\mu - \lambda} = 0.$$