Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 11

Abgabetermin: 24. Januar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis,
Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Ergodensatz)

Sei $1 < p < \infty$ und $T : l^p \to l^p, (Tx)_n = x_{n+1}$ der Shift-Operator. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} T^k x}{N} = 0 \qquad (x \in l^p).$$

Was können Sie über die linke Seite im Fall $p = 1$ und $p = \infty$ sagen?

Aufgabe 2 (Gegenbeispiel anschließend an 16.7)

Sei $E := C([0,1], \mathbb{R})$, sowie

$$C := \left\{ f \in E : \int_0^{1/2} f(t)\,dt - \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt = 1 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass C abgeschlossen und konvex ist.

b) Zeigen Sie, dass $\|g\|_\infty > \inf_{f\in C} \|f\|_\infty \quad (g \in C)$ gilt.

Aufgabe 3 (Fortsetzungssatz für Hilberträume)

Beweisen Sie den Fortsetzungssatz linearer Funktionale auf abgeschlossenen Unterräumen von Hahn-Banach für Hilberträume mittels des Darstellungssatzes von Fréchet-Riesz. Genauer: Sei $U \subseteq H$ abgeschlossener Untervektorraum und $\phi \in U'$. Dann gibt es ein lineares Funktional $\psi \in H'$ mit $\psi(x) = \phi(x) \quad (x \in U)$ und $\|\phi\|_{U'} = \|\psi\|_{H'}$.

Aufgabe 4 (Hilberträume)

Sei H ein komplexer Hilbertraum und $A \in L(H)$. Ein Element $v \in H \setminus \{0\}$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, falls $Av = \lambda v$ gilt. Sei A symmetrisch, zeigen Sie:

a) Eigenwerte sind reell.

b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal.

Bitte per Qispos zur Klausur anmelden!