Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 12 - Lösungen

Abgabetermin: 31. Januar 2014 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Besselsche Gleichung)

Beweisen Sie die Besselsche Gleichung aus der Vorlesung: Sei $S = \{u_1, u_2, \cdots\}$ ein abzählbares Orthonormalsystem in E . $(u_k \neq u_j)$ $k \neq j$, dann gilt

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, u_k)|^2 \qquad (x \in E,\ n \in \mathbb{N}).$$

Lösung:per Induktion:
$n = 1$: es gilt:

$$\begin{aligned} &\|x - (x, u_1)u_1\|^2 = (x - (x, u_1)u_1, x - (x, u_1)u_1) \\ =&\|x\|^2 - (x, u_1)(u_1, x) - \overline{(x, u_1)}(x, u_1) + (x, u_1)\overline{(x, u_1)}(u_1, u_1) = \|x\|^2 - |(x, u_1)|^2 \end{aligned}$$

$n \to n + 1$:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n+1} (x, u_k) u_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k - (x, u_{k+1}) u_{k+1}, x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k - (x, u_{k+1}) u_{k+1} \right)$$

$$= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k \right\|^2 - \left(x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k, (x, u_{k+1}) u_{k+1} \right) - \left((x, u_{k+1}) u_{k+1}, x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k \right) + |(x, u_{k+1})|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, u_k)|^2 - 2|(x, u_{k+1})|^2 + |(x, u_{k+1})|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n+1} |(x, u_k)|^2$$

Aufgabe 2 (Fourierreihe)

Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_n(x) = 1/\sqrt{2\pi} e^{inx}$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis in $L^2([0, 2\pi])$ bilden. Berechnen Sie außerdem die Fourierkoeffizienten von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$.

Lösungen:

Für $m \neq n$ gilt:

$$(\phi_n, \phi_m) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(n-m)x}\, dx = \frac{1}{2\pi i(n-m)} \left[e^{i(n-m)x} \right]_0^{2\pi} \overset{n-m \in \mathbb{Z}}{=} 0.$$

Ferner gilt:

$$(\phi_n, \phi_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\, dx = 1.$$

Dass ϕ_n tatsächlich eine Basis bilden, kostet mehr Aufwand. Es reicht, die Behauptung für Treppenfunktionen zu zeigen, tatsächlich ist es genug, die Behauptung für charakteristische Funktionen zu zeigen. Denn sei $C_1 \cup C_2 \cup \dots = [0, 2\pi]$ eine disjunkte Vereinigung messbarer Mengen, so gilt $(\chi_{C_i}, \chi_{C_j}) = vol(C_i)\delta_{ij}$. Die Funktionen $vol(C_j)^{-1/2}\chi_{C_j}$ bilden also ein VONS des Hilbertraumes $\overline{[\chi_{C_j}}$. Daher gilt für $f = \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \chi_{C_j}$, $(\alpha_j \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = &\left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} \alpha_j \chi_{C_j} \right\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_j|^2 \left\|\chi_{C_j}\right\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_j|^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(\chi_{C_j}, \phi_n)|^2 \\ = &\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{N}} |(\alpha_j \chi_{C_j}, \phi_n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |(f, \phi_n)|^2\end{aligned}$$

Das Vertauschen der Summenzeichen ist erlaubt, da die Summe absolut konvergiert und man daher umordnen darf.
Wir setzen nun die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(\alpha k)}{k^2} = \frac{(\alpha - \pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

voraus. Die Rechnung machen wir in der Übung. Für $\chi_{[a,b]}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}&\sum_{n\in\mathbb{Z}} |(\chi_{[a,b]}, \phi_n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right|^2 \\ =&\frac{(b-a)^2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx} \right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \right|^2 \\ =&\frac{(b-a)^2}{2\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n^2} \left| e^{-inb} - e^{-ina} \right|^2 \\ =&\frac{(b-a)^2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2\pi n^2} (1 - \cos(n(b-a))) \\ =&\frac{(b-a)^2}{2\pi} - \frac{4}{2\pi} \left(\frac{(b-a-\pi)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) + \frac{4}{2\pi} \frac{\pi^2}{6} \\ =&b - a = \|\chi_{[a,b]}\|^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Reproduzierende Kerne)

Sei E ein reeller Hilbertraum, der aus auf einer Menge S definierten Funktionen besteht. Ein reproduzierender Kern für E ist eine Funktion $k : SxS \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften, wobei $k_s(t) := k(s,t)$:

$$k_t \in H,\ f(t) = \langle f, k_t \rangle \qquad (t \in S, f \in H)$$

.

a) Wenn ein reproduzierender Kern exisitiert, ist er eindeutig bestimmt.

b) Genau dann existiert ein reproduzierender Kern, wenn alle Funktionale $f \mapsto f(t)$ $(t \in S)$ stetig sind.

c) Wenn k ein reproduzierender Kern ist, liegt die lineare Hülle der k_t, $t \in S$ dicht in E.

d) Bestimme den reproduzierenden Kern für den zweidimensionalen Hilbertraum H mit L^2-Skalarprodukt, der aus allen Funktionen der Form $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = a + bt$ besteht.

Lösung:

a) Seien k^1 und k^2 reproduzierende Kerne. Dann folgt:

$$\langle f, k_t^2 \rangle - \langle f, k_t^1 \rangle = f(t) - f(t) = 0 \qquad (t \in S, f \in H).$$

Daher ist $k_{s,t}^2 = k_{s,t}^1 \quad (s,t) \in S \times S$.

b) Angenommen $k_{s,t}$ existiert, dann gilt $|f(t)| = \langle f, k_t \rangle \leq \|f\| \cdot \|k_t\|$. Das Auswertungsfunktional ist stetig. Angenommen alle Auswertungsfunktionale sind stetig, dann gibt es für alle $t \in S$ ein $k_t \in H$ mit $\langle f, k_t \rangle = f(t)$ nach Rieszschem Darstellungssatz. Definiere in diesem Fall $k_{s,t} := k_t(s)$.

c) Sei $f \in H$ mit $\langle f, k_t \rangle = 0 \quad (t \in S)$, dann folgt $f(t) = \langle f, k_t \rangle = 0 \quad (t \in S)$ und damit $f = 0$.

d) $k_t(s) \in H$ Daher gilt $k_t(s) = a(t) + b(t)s$. Einsetzen in die Bestimmungsgleichung liefert

$$k_{s,t} = (4 - 6t)s + (12t - 6)s$$

Aufgabe 4 (Schwache Konvergenz in Hilberträumen)

Sei H ein Hilbertraum und (x_k) eine Folge in H, dann sind äquivalent:

a) $x_k \to x$

b) $x_k \to_w x$ und $\|x_k\| \to \|x\|$

Lösung:

Sei x_k Folge in H mit Eigenschaften b). Dann gilt

$$\|x_k - x\|^2 = \langle x_k, x_k \rangle - \langle x, x_k \rangle - \langle x_k, x \rangle + \langle x, x \rangle \to \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0 \qquad (k \to \infty).$$