Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 12

Abgabetermin: 31. Januar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Besselsche Gleichung)

Beweisen Sie die Besselsche Gleichung aus der Vorlesung: Sei $S = \{u_1, u_2, \cdots\}$ ein abzählbares Orthonormalsystem in E. $(u_k \neq u_j)$ $k \neq j$, dann gilt

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} (x, u_k) u_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(x, u_k)|^2 \qquad (x \in E,\ n \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 2 (Fourierreihe)

Zeigen Sie, dass die Funktionen $\phi_n(x) = 1/\sqrt{2\pi} e^{inx}$ für $n \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis in $L^2([0, 2\pi])$ bilden. Berechnen Sie außerdem die Fourierkoeffizienten von $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$.

Aufgabe 3 (Reproduzierende Kerne)

Sei E ein reeller Hilbertraum, der aus auf einer Menge S definierten Funktionen besteht. Ein reproduzierender Kern für E ist eine Funktion $k : SxS \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften, wobei $k_s(t) := k(s, t)$:

$$k_t \in H,\ f(t) = \langle f, k_t \rangle \qquad (t \in S, f \in H)$$

.

a) Wenn ein reproduzierender Kern exisitiert, ist er eindeutig bestimmt.

b) Genau dann existiert ein reproduzierender Kern, wenn alle Funktionale $f \mapsto f(t)$ $(t \in S)$ stetig sind.

c) Wenn k ein reproduzierender Kern ist, liegt die lineare Hülle der $k_t,\ t \in S$ dicht in E.

d) Bestimme den reproduzierenden Kern für den zweidimensionalen Hilbertraum H mit L^2-Skalarprodukt, der aus allen Funktionen der Form $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, f(t) = a + bt$ besteht.

Aufgabe 4 (Schwache Konvergenz in Hilberträumen)

Sei E ein Hilbertraum und (x_k) eine Folge in E, dann sind äquivalent:

a) $x_k \to x$

b) $x_k \to_w x$ und $\|x_k\| \to \|x\|$