Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 13

Abgabetermin: 6. Februar 2014 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Legendre Polynome)

Die Legendre-Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien definiert als

$$P_n(x) := \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

Zeigen Sie, dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis in $C[-1,1]$ bezüglich des Innenproduktes

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f\overline{g}\,dx$$

ist und dass sie durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung aus den Monomen $(x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entsteht.

Lösung:

Zunächst ist für $m<n$ der Term $\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ senkrecht auf x^m , Denn es gilt mit partieller Integration

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx = \left[x^m \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} - m\int_{-1}^{1} x^{m-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n\,dx$$

Der Term $(x^2-1)^n$ hat eine n-fache Nullstelle bei 1 und -1. Daher verschwindet der Term in eckigen Klammern. Dies geschieht auch bei mehrfachem Wiederholen der partiellen Integration, sodass man erhält:

$$\int_{-1}^{1} x^m \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^m m! \int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^m \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Daraus folgt mittels Linearität des Integrals auch P_m senkrecht auf P_n für $m<n$. Betrachte nun

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx = (-1)^n \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx,$$

Der verbleibende Term wird wieder mit partieller Integration behandelt, wobei die Randterme wieder verschwinden:

$$\begin{aligned}(-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx &= (2n)!\int_{-1}^{1}(x+1)^{2n}\frac{n(n-1)\cdots}{(n+1)(n+2)\cdots}\\ = (2n)!\frac{1}{2n+1}\frac{n(n-1)\cdots}{(n+1)(n+2)\cdots}\left[(x+1)^{2n+1}\right]_{-1}^{1} &= 2^{2n+1}\frac{(2n)!}{2n+1}\frac{n(n-1)\cdots}{(n+1)(n+2)\cdots} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}.\end{aligned}$$

Dass P_n aus der Orthogonalisierung der Monome entstehen folgt aus der Tatsache, dass P_n senkrecht auf x^m mit $m<n$ steht und dass der Grad von P_n auch n ist.

Aufgabe 2 (Der Raum $H^2(\mathbb{D})$)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$k(z,w):\mathbb{D}\times\mathbb{D}\to\mathbb{C},\ k(z,w):=\frac{1}{1-\overline{w}z}$$

ein reproduzierender Kern (Aufgabe 3 Zettel 12) von $H^2(\mathbb{D})$ ist.

b) Betrachten Sie den isometrischen Isomorphsmus

$$U:H^2(\mathbb{D})\to l^2(\mathbb{N}_0),\ \sum_{n\geq 0}a_nz^n\mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Sei L,R der Links- bzw. Rechtsshift auf l^2. Berechnen Sie $U^{-1}LU$ und $U^{-1}RU$.

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}(f,k_w)&=\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{it}\right)\overline{\frac{1}{1-re^{it}\overline{w}}}\,dt\\ &=\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{it}\right)\frac{1}{1-re^{-it}w}\,dt\\ &=\lim_{r\to 1-}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{it}\right)\frac{1}{e^{it}-rw}e^{it}\,dt\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(e^{it}\right)\frac{1}{e^{it}-w}e^{it}\,dt\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K[0,1]}\frac{f(z)}{z-w}\,dz=f(w)\end{aligned}$$

b) Es gilt:

$$U^{-1}LU\sum_{n\geq 0}a_nz^n=\sum_{n\geq 0}a_{n+1}z^n=\sum_{n\geq 1}a_nz^{n-1}=\frac{1}{z}\left(I-(\cdot,k(z,0))\right)\sum_{n\geq 0}a_nz^n,$$

sowie

$$U^{-1}RU\sum_{n\geq 0}a_nz^n=\sum_{n\geq 1}a_{n-1}z^n=z\sum_{n\geq 0}a_nz^n.$$

Aufgabe 3 (Hilberträume und ihr Dualraum)

Sei H ein Hilbertraum und S eine Orthonormalbasis. Definieren Sie wie in der Vorlesung

$$K:H\to H,\ K(x):=\sum_{u\in S}\overline{\langle x,u\rangle}u.$$

Zeigen Sie $K^2=Id$.

Lösung:

Es reicht, die Behauptung für αu, $u\in S$, $\alpha\in\mathbb{C}$ zu zeigen, der Rest folgt mittels Additivität: Es gilt:

$$K(\alpha u)=\overline{\alpha}u\qquad\Rightarrow\qquad K^2(\alpha u)=\alpha u$$

Aufgabe 4 (Lax-Milgram)

Sei H ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und sei $B : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear.

a) Falls B stetig ist, so existiert ein $T \in L(H)$ mit

$$B(x,y) = (Tx,y) \qquad (x,y \in H).$$

b) Gilt zusätzlich

$$\exists m > 0 \, \forall x \in H: \qquad B(x,x) \geq m\|x\|^2,$$

so ist T invertiertar und es gilt $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$.

Lösung:

a) Die Abbildung $B(x,\cdot): \ y \to B(x,y)$ ist linear und stetig, also gibt es ein $v \in H$ mit $B(x,y) = (v,y) \ \ (y \in H$. Definiere $Tx := v$. T ist stetig, denn es gilt:

$$(Tx,x) = (v,x) = B(x,x) \leq C(x,x) \qquad (x \in H).$$

Dann gilt

$$(Tx,Tx) = B(x,Tx) \leq C\|x\|\|Tx\| \qquad (x \in H)$$

und daher

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \qquad (x \in H).$$

b) Injektivität: $Tx = 0$ dann gilt $0 = (0,x) = B(x,x) \geq m\|x\|^2$ und daher $x = 0$.
Surjektivität: Betrachte die Abbildung $A : H \to H, u \mapsto u - \rho(Tu - w)$ für $\rho > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|Au_1 - Au_2\|^2 =& \|u_1 - u_2 - \rho(Tu_2 - Tu_1)\|^2 \\
=& \|u_1 - u_2\|^2 - 2(\rho T(u_2 - u_1), u_2 - u_1) + \|\rho T(u_2 - u_1)\|^2 \\
\leq& \|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho m\|u_1 - u_2\|^2 + \rho^2 C^2\|u_1 - u_2\|^2 \leq (1 + \rho m + \rho^2 C^2)\|u_1 - u_2\|^2
\end{aligned}$$

Für $\rho = m/C^2$ ist diese Differenz kleiner als $(1 - m^2/C^2)\|u_1 - u_2\|^2$. Die Abbildung A ist also eine Kontraktion und Selbstabbildung in einem Banachraum. Mit dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau einen Fixpunkt, sodass fuer diesen folgt:

$$u = u - \rho(Tu - w) \qquad \Leftrightarrow Tu = w$$

Da w beliebig war, ist T surjektiv. Die Stetigkeit von T^{-1} und die Abschätzung der Norm folgen mittels Satz 4.4 im Skript.