Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 13

Abgabetermin: 6. Februar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Legendre Polynome)

Die Legendre-Polynome $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien definiert als

$$P_n(x) := \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

Zeigen Sie, dass $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Orthonormalbasis in $C[-1,1]$ bezüglich des Innenproduktes

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f\overline{g}\,dx$$

ist und dass sie durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung aus den Monomen $(x^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ entsteht.

Aufgabe 2 (Der Raum $H^2(\mathbb{D})$)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$k(z,w) : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{C},\ k(z,w) := \frac{1}{1-\overline{w}z}$$

ein reproduzierender Kern (Aufgabe 3 Zettel 12) von $H^2(\mathbb{D})$ ist.

b) Betrachten Sie den isometrischen Isomorphsmus

$$U : H^2(\mathbb{D}) \to l^2(\mathbb{N}_0),\ \sum_{n\geq 0} a_n z^n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$

Sei L, R der Links- bzw. Rechtsshift auf l^2. Berechnen Sie $U^{-1}LU$ und $U^{-1}RU$.

Aufgabe 3 (Hilberträume und ihr Dualraum)

Sei H ein Hilbertraum und S eine Orthonormalbasis. Definieren Sie wie in der Vorlesung

$$K : H \to H,\ K(x) := \sum_{u\in S} \overline{\langle x,u\rangle} u.$$

Zeigen Sie $K^2 = Id$.

Aufgabe 4 (Lax-Milgram)

Sei H ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und sei $B : H\times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear.

a) Falls B stetig ist, so existiert ein $T \in L(H)$ mit

$$B(x,y) = (Tx,y) \qquad (x,y\in H).$$

b) Gilt zusätzlich

$$\exists m>0\,\forall x\in H: \qquad B(x,x) \geq m\|x\|^2,$$

so ist T invertiertar und es gilt $\|T^{-1}\| \leq m^{-1}$.