Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 14

Abgabetermin: 14. Februar 2014 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Kompakte Operatoren auf Hilberträumen)

Sei H ein Hilbertraum.

a) Sei $K \in L(H)$ ein kompakter Operator und symmetrisch. Dann ist entweder $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert.

b) Sei $A \in L(H)$ mit $\|A\|$ ist Eigenwert von A , so gilt $\|I + A\| = 1 + \|A\|$

Lösung:

a) Es gilt $\|K\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Kx, x\rangle|$. Das heißt es gibt eine beschränkte Folge (x_k) in H mit $\langle Ax_k, x_k\rangle \to \|A\|$ oder $-\|A\|$ Wir beschränken uns auf den positiven Fall. Da A kompakt ist, gibt es eine Teilfolge (die auch mit x_k bezeichnet wird), mit $Ax_k \to y$ in H . Dann ist

$$Ax_k - \|A\|x_k$$

eine Nullfolge, denn es gilt:

$$\|Ax_k - \|A\|x_k\|^2 \leq -2\|A\|\Re(\langle Ax_k, x_k\rangle) + 2\|A\|^2$$

Das heißt x_k konvergiert gegen ein $x \in H$ und es gilt:

$$A(x) = \lim_{k\to\infty} A(x_k) = \lim_{k\to\infty} \|A\|x_k = \|A\|x$$

b) Sei v normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\|A\|$. dann gilt

$$\|I + A\| \geq \|(I + A)v\| = (1 + \|A\|)\|v\| = 1 + \|A\| \qquad \Rightarrow \qquad \|I + A\| \geq 1 + \|A\|$$

Andererseits gilt $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (A, B \in L(H))$.

Aufgabe 2 (Zum Adjungierten Operatoren)

Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Zeigen Sie

$$N(T) = T^*(H_2)^\perp, \qquad \overline{T^*(H_2)} = N(T)^\perp$$

Lösung:

Sei $u \in N(T)$, $v \in H_2$, dann gilt:

$$0 = (0, v) = (Tu, v) = (u, T^*v).$$

Andererseits, falls $u \in T^*(H_2)^\perp$, so gilt für alle $v \in H_2$:

$$0 = (u, T^*v) = (Tu, v)$$

und damit $Tu = 0$, also $u \in N(T)$ Damit folgt der erste Teil.
Sei nun (u_n) eine Folge in $T^*(H_2)$ mit $u_n \to u \in H_1$. Sei $\xi_n \in H_2$ mit $T^*\xi_n = u_n$, sowie $v \in N(T)$. Dann gilt:

$$(u, v) = \lim_{n\to\infty} (T^*\xi_n, v) = \lim_{n\to\infty} (\xi_n, Tv) = 0.$$

Damit haben wir: Falls $u \in \overline{T^*(H_2)}$ ist, folgt, dass $u \in N(T)^\perp$. Andererseits, falls $v \in N(T)^\perp$, so gilt nach dem ersten Teil, $v \in (T^*(H_2)^\perp)^\perp = \overline{T^*(H_2)}$.

Aufgabe 3 (Cayley-Transformation)

Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ symmetrisch.

a) Zeigen Sie $\|(A \pm iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$ und folgern Sie, dass $(A \pm iI)$ invertierbar sind mit stetiger Inversen.

b) Zeigen Sie, dass die Cayley-Transformierte $U_A := (A + iI)(A - iI)^{-1}$ unitär ist.

c) Zeigen Sie, dass $I - U_A$ invertierbar ist mit stetiger Inversen und dass gilt:

$$A = i(U_A + I)(U_A - I)^{-1}.$$

Lösung:

$$\|(A \pm iI)x\|^2 = ((A \pm iI)x, (A \pm iI)x) = \|Ax\|^2 + i(Ax, x) - i(x, Ax) + (x, x) = \|Ax\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2$$

. Ferner ist $A \pm i$ injektiv, da Eigenwerte von symmetrischen Operatoren reell sind, sowie surjektiv mittels Aufgabe 2 erster Teil, da $\{0\} = N(A \pm iI)$ und daher $(A \pm iI)^*(H) = (A \mp i)(H)$ dicht in H ist. Sei (y_n) Folge im Bild mit Grenzwert $y \in H$. Da $(A \pm iI)$ von unten beschränkt ist, ist $(A \pm iI)^{-1} : (A \pm iI)(H) \to H$ stetig. Das heißt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ und y_n gibts $x_n \in H$ mit $(A \pm iI)x_n = y_n$ und die Folge (x_n) konvergiert in H gegen ein x. dieses x ist aber in H und daher gibts $y' \in (A \pm i)$ mit $y' = \lim_{n\to\infty} (A \pm iI)x_n$ Aufgrund der Stetigkeit von A ist $y' = y$ und das Bild von $(A \pm iI)$ abgeschlossen.
$U_A^* = (A + iI)^{-1}(A - iI) = -2i(A + iI)^{-1} + I = (A - iI)(A + iI)^{-1}$. Dann folgt $U_A U_A^* = U_A^* U_A = I$.
Zeige, dass 1 nicht im Spektrum von U_A liegt. Angenommen $u \in N(I - U_A)$. Dann gilt

$$u = (A + iI)(A - iI)^{-1}u \;\Leftrightarrow\; iu = -iu \;\Leftrightarrow\; u = 0$$

. Ferner sind $(A + iI)$ und $(A - iI)$ insbesondere surjektiv und damit auch $I - (A + iI)(A - iI)^{-1} = -2i(A - iI)^{-1}$. Die Stetigkeit der Inversen folgt wieder mit dem Satz ueber die Umkehrabbildung. Bleibt die letzte Identität:

$$i(U_A + I)(U_A - I)^{-1} = iI + 2iI(U_A - I)^{-1} = iI + 2iI(2i(A - iI)^{-1})^{-1} = i + (A - iI) = A$$

Aufgabe 4 (Adjungierte Matrix und duale Abbildung)

Sei $H = \mathbb{C}^n$ und $A = (a_{i,j})$ eine $n \times n$-Matrix aufgefasst als Element in $L(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$A^* = (\overline{a_{j,i}}) \qquad A' = (a_{j,i})$$

Lösung:

Seien $v, w \in \mathbb{C}^n$, dann gilt

$$(Av, w) = \sum_{i=1}^{n} (Av)_i \overline{w_k} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_j \overline{w_i} = \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{\sum_{i=1}^{n} \overline{a_{ij}} w_i}$$

Daher $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$.
Sei $l \in (\mathbb{C}^n)'$. Sei $e'_i \in (\mathbb{C}^n)'$ dadurch erklärt, dass $e'_i(v_1, \cdots v_n) = v_i$ gilt. Dann ist e'_i Basis und $l = \sum_{i=1}^{n} l_i e'_i$. Es gilt dann für $v \in \mathbb{C}$:

$$(A^T l)(v) = \sum_{i=1}^{n} (A^T l)_i e'_i(v) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ji} l_j v_i = \sum_{j=1}^{n} l_j \sum_{i=1}^{n} a_{ji} v_i = \sum_{j=1}^{n} l_j (Av)_j = \sum_{j=1}^{n} l_j e'_j(A(v)) = l(Av) = (A' l)(v)$$