Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 14

Abgabetermin: 14. Februar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis,
Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Kompakte Operatoren auf Hilberträumen)

Sei H ein Hilbertraum.

a) Sei $K \in L(H)$ ein kompakter Operator und symmetrisch. Dann ist entweder $\|A\|$ oder $-\|A\|$ ein Eigenwert.

b) Sei $A \in L(H)$ mit $\|A\|$ ist Eigenwert von A, so gilt $\|I + A\| = 1 + \|A\|$

Aufgabe 2 (Zum Adjungierten Operatoren)

Seien H_1, H_2 Hilberträume und $T \in L(H_1, H_2)$. Zeigen Sie

$$N(T) = T^*(H_2)^\perp, \qquad \overline{T^*(H_2)} = N(T)^\perp$$

Aufgabe 3 (Cayley-Transformation)

Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $A \in L(H)$ symmetrisch.

a) Zeigen Sie $\|(A \pm iI)x\|^2 = \|Ax\|^2 + \|x\|^2$ und folgern Sie, dass $(A \pm iI)$ invertierbar sind mit stetiger Inversen.

b) Zeigen Sie, dass die Cayley-Transformierte $U_A := (A + iI)(A - iI)^{-1}$ unitär ist.

c) Zeigen Sie, dass $I - U_A$ invertierbar ist mit stetiger Inversen und dass gilt:

$$A = i(U_A + I)(U_A - I)^{-1}.$$

Aufgabe 4 (Adjungierte Matrix und duale Abbildung)

Sei $H = \mathbb{C}^n$ und $A = (a_{i,j})$ eine $n \times n$-Matrix aufgefasst als Element in $L(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt:

$$A^* = (\overline{a_{j,i}}) \qquad A' = (a_{j,i})$$