Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 2

Abgabetermin: 08. November 2013 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Stetigkeit in Normierten Räumen)

Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \mapsto A \cdot x,$$

wobei A eine Matrix

$$A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,\ n}$$

mit Einträgen in $\mathbb{R}$ ist, stetig ist.

Bemerkung: Da die Normen in endlich dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind, ist die Behauptung für alle Normen richtig.

Berechnen Sie außerdem die Norm der Abbildung, falls $\mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\|_2$ und $\mathbb{R}^m$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ trägt. Dabei ist

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad \|y\|_\infty = \max_{k=1..m} |x_k|.$$

Lösung:

Da alle Normen äquivalent sind, ist die stellvertretende Berechnung der Abbildungsnorm des zweiten Teils ausreichend, um den ersten Teil zu beweisen. Es ist:

$$\begin{aligned}\|f_A(x)\|_\infty = \|A \cdot x\|_\infty = \max_{i=1..m} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right| \\ \leq \max_{i=1..m} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} = \max_{i=1..m} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2} \cdot \|x_k\|_2\end{aligned}$$

Sei i_0 , sodass

$$\max_{i=1..m} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i_0k}|^2\right)^{1/2}$$

Wähle dann $x = (a_{i_0k})_{k=1}^n$ und für dieses x gilt Gleichheit. Daher kann es keine kleinere Konstante geben, für die die Abschätzung stimmt und es folgt

$$\|f_A\| = \max_{i=1..m} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right)^{1/2}.$$

Aufgabe 2 (Einige Unterschiede von allgemeinen Banachräumen zum $\mathbb{R}^n$)

i) Finden Sie eine stetige lineare Abbildung auf einem (unendlich dimensionalen) Banachraum, die

   a) injektiv und nicht surjektiv ist,

b) surjektiv und nicht injektiv ist.

ii) Finden Sie eine stetige lineare Abbildung die kein abgeschlossenes Bild hat.

Lösung

i) a) Betrachte
$$f: l^2 \longrightarrow l^2,\ x = (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, ...).$$
Diese Abbildung ist stetig (mit Norm 1), injektiv, da aus $f(x) = 0$ folgt, dass $x_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. aber nicht surjektiv, da jede Folge mit erstem Glied verschieden 0 kein Urbild hat.

b) Betrachte
$$g: l^2 \longrightarrow l^2,\ x = (x_1, x_2, x_3, ...) \mapsto (x_2, x_3, x_4 ...).$$
Diese ist wieder stetig mit Konstanten 1. (Die Gleichheit wie in der ersten Aufgabe erhält man durch Einsetzen von Elementen mit $x_1 = 0$). Die Abbildung ist surjektiv. Zu beliebigem $x \in l^2$ wähle $f(x)$ aus a). Aber g ist nicht injektiv, da zum Beispiel $g(1, 0, 0, 0, ...) = g(0, 0, 0, 0, ...)$.

ii) Betrachte die Abbildung
$$I: C([0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow L^1([0,1]), I(f) = f.$$
Diese Abbildung ist stetig, denn
$$\|I(f)\|_{L^1} = \int_{[0,1]} |f(x)|\, dx \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \cdot \int_{[0,1]} 1\, dx = \|f\|_\infty. \qquad (f \in C([0,1]))$$
Aber $C([0,1])$ ist nicht abgeschlossen in $L^1([0,1])$. Betrachte zum Beispiel die Folge:
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{für } x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nx + 1 - \frac{n}{2} & , \text{für } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & , \text{sonst.} \end{cases}$$
Dann gilt:
$$\|f_n(x) - \chi_{(1/2,1]}(x)\|_{L^1} = \int_{[0,1]} |f(x) - \chi_{(1/2,1]}(x)|\, dx = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$
aber $\chi_{(1/2,1]}(x)$ ist nicht stetig. Daher ist das Bild von I nicht abgeschlossen.

Aufgabe 3 (l^p -Räume)

i) Zeigen Sie, dass $l^p := \left\{ (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$ zusammen mit der Norm
$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$
ein Banachraum ist.

ii) Zeigen Sie, dass
$$c := \{(x_n) \in \omega :\ (x_n) \text{ konvergiert}\},$$
sowie
$$c_0 := \{(x_n) \in \omega :\ (x_n) \text{ konvergiert gegen } 0\},$$
abgeschlossene und damit vollständige Unterräume von l^∞ sind.

Lösung

i) Sei $(x^{(k)}) \subset l^p$ eine Cauchy-Folge. Dann bildet jedes Glied dieser Folge eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, denn für $i \in \mathbb{N}$ fest und k, l groß genug gilt

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(l)}| \leq \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i^{(k)} - x_i^{(l)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Es gilt weiter für beliebiges $M \in \mathbb{N}$ und gleiches ε, dass

$$\left(\sum_{i \leq M} |x_i^{(k)} - x_i^{(l)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Lässt man nun n gegen ∞ gehen, gilt:

$$\left(\sum_{i \leq M} |x_i^{(k)} - x_i|^p \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{1}$$

Da die linke Seite von (1) für festes k monoton und beschränkt ist, folgt damit, dass $x - x^{(k)} \in l^p$ und damit $x = x^{(k)} + (x - x^{(k)}) \in l^p$. Die rechte Seite ist unabhängig von M. Daher gilt auch

$$\|x - x^{(k)}\|_p < \varepsilon.$$

ii) Zeige c ist abgeschlossen. Betrachte das Komplement $l^\infty \setminus c$ und sei $(x_n) \in l^\infty \setminus c$. Dann konvergiert (x_n) per Definition nicht. Es gibt also für alle $r \in \mathbb{R}$ ein $\varepsilon > 0$, sodass für beliebig viele $N \in \mathbb{N}$ gilt: $|x^N - r| \geq \varepsilon$. Wähle nun eine δ-Kugel in l^∞ um (x_n) mit $\delta = \varepsilon/2$. Dann gilt für alle $y \in B_{\varepsilon/2}((x_n))$ und alle $r \in \mathbb{R}$

$$|y_N - r| \geq |x_N - r| - |x_N - y_N| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daher ist die Kugel komplett in $l^\infty \setminus c$ enthalten. Der Beweis zu c_0 ist analog mit $r = 0$.

Aufgabe 4 (Kompakte Mengen in l^2)

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $l^2 := \left\{ (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ auf Beschränktheit und Kompaktheit:

$$E_1 := \{(x_n) \in l^2 : \ |x_n| \leq n^{-1/2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$
$$E_2 := \{(x_n) \in l^2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1\}$$
$$E_3 := \{(x_n) \in l^2 : \ |x_n| \leq n^{-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Lösung

E_1 ist nicht beschränkt, wähle Folge $(x_n^{(m)}) \in l^2$ mit

$$x_n^{(m)} = \begin{cases} n^{-1/2} & \text{, für } n \leq m \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Diese Folge ist unbeschränkt, und alle Folgenglieder sind in E_1.

E_2 ist offensichtlich beschränkt, aber die Folge $(x_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}} = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge, denn für alle $m \neq m'$ gilt:

$$\|(\delta_{m,n}) - (\delta_{m',n})\|_{l^2} = \sqrt{2}.$$

Daher ist E_2 nicht kompakt.
Dass E_3 folgenkompakt ist, sieht man wie folgt: Sei $x^{(m)}$ eine beliegige Folge in E_3. Dann ist $x_1^{(m)}$ eine Folge in $[0,1]$. Es gibt also eine Teilfolge von $x^{(m_j)}$, sodass $x_1^{(m_j)}$ konvergiert. Fahre mit den weiteren Folgegliedern so fort.