Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 2

Abgabetermin: 08. November 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis,
Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Stetigkeit in Normierten Räumen)

Zeigen Sie, dass die Abbildung:

$$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ x \mapsto A \cdot x,$$

wobei A eine Matrix

$$A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{m,\ n}$$

mit Einträgen in $\mathbb{R}$ ist, stetig ist.

Bemerkung: Da die Normen in endlich dimensionalen Vektorräumen äquivalent sind, ist die Behauptung für alle Normen richtig.

Berechnen Sie außerdem die Norm der Abbildung, falls $\mathbb{R}^n$ die Norm $\|\cdot\|_2$ und $\mathbb{R}^m$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ trägt. Dabei ist

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \qquad \|y\|_\infty = \max_{k=1..m} |x_k|.$$

Aufgabe 2 (Einige Unterschiede von allgemeinen Banachräumen zum $\mathbb{R}^n$)

i) Finden Sie eine stetige lineare Abbildung auf einem (unendlich dimensionalen) Banachraum, die
   a) injektiv und nicht surjektiv ist,
   b) surjektiv und nicht injektiv ist.

ii) Finden Sie eine stetige lineare Abbildung die kein abgeschlossenes Bild hat.
.

Aufgabe 3 (l^p -Räume)

i) Zeigen Sie, dass $l^p := \left\{(x_n) \in \omega :\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$ zusammen mit der Norm

$$\|(x_n)\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

ein Banachraum ist.

ii) Zeigen Sie, dass

$$c := \{(x_n) \in \omega :\ (x_n) \text{ konvergiert}\},$$

sowie

$$c_0 := \{(x_n) \in \omega :\ (x_n) \text{ konvergiert gegen } 0\},$$

abgeschlossene und damit vollständige Unterräume von l^∞ sind.

Hinweis: Bitte wenden

Aufgabe 4 (Kompakte Mengen in l^2)

Untersuchen Sie die folgenden Teilmengen von $l^2 := \left\{ (x_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}$ auf Beschränktheit und Kompaktheit:

$$E_1 := \{(x_n) \in l^2 : \ |x_n| \le n^{-1/2} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

$$E_2 := \{(x_n) \in l^2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \le 1\}$$

$$E_3 := \{(x_n) \in l^2 : \ |x_n| \le n^{-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

Ergänzung zur letzten Übung

Es blieb die Frage offen, warum in einem Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (für metrische Räume: separabel ist), eine beliebige offene Überdeckung immer eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Hier zunächst der Beweis und anschließend eine Begründung, warum die Analogie zur Überabzählbarkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen nicht funktioniert.

Beweis Sei X zweitens abzählbar mit abzählbarer Basis $\mathcal{B}$ der offenen Mengen und $\{U_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ eine beliebige offene Überdeckung von X . Für $i \in \mathcal{I}$ ist U_i eine abzählbare Vereinigung offener Mengen in $\mathcal{B}$.

$$U_i = \bigcup_{j(i)\in\mathcal{J}(i)} B_{j(i)}$$

mit $B_{j(i)} \in \mathcal{B}$ und $\mathcal{J}(i)$ abzählbar. Es ist

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \bigcup_{j\in\mathcal{J}(i)} B_{j(i)} = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i \supset X$$

und daher die $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \bigcup_{j\in\mathcal{J}(i)} B_{j(i)}$ bereits eine Überdeckung von X . Man beachte, dass

$$\{B_{j(i)}\}_{j(i)\in\mathcal{J}(i),\ i\in\mathcal{I}} =: \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$$

gilt und daher *abzählbar* ist. Für jedes $B \in \mathcal{B}_0$ wählt man nun ein Element der ursprünglichen Überdeckung aus, welches B enthält. Dies ist dann eine abzählbare Teilüberdeckung.

Bemerkung Bei der Überabzählbarkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen geht es um die Frage, wie viele Teilmengen dieser abzählbaren Menge es gibt. Sicher ist also die Anzahl der möglichen Kombinationen von Elementen der abzählbaren Basis der offenen Mengen als Potenzmenge der Basis überabzählbar. Die möglichen Probleme im Denkprozess, auf die ich komme, sind die folgenden:

- Eine beliebige offene Menge kann als Element (und nicht als Teilmenge) der Potenzmenge der Basiselemente verstanden werden. Als solches besteht sie aus abzählbar vielen Basismengen.
- Betrachtet man eine (möglicherweise überabzählbare) Teilmenge $\mathcal{B}$ der Potenzmenge 2^X , so besteht die Vereinigung der Mengen in dieser Teilmenge $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset X$ immernoch aus abzählbar vielen Elementen, wenn X abzählbar ist.

Ich hoffe, das beseitigt die Unklarheit bezüglich der abzählbaren Teilüberdeckung. Für Fragen gilt das Übliche: Übung, Email oder Sprechstunde.