**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

# Funktionalanlysis Übungsblatt 3 - Lösungen

Abgabetermin: 15. November 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

## Aufgabe 1 (zur Hölderungleichung)

i) (Lyapunovsche Ungleichung) Seien $1 \le p_0, p_1 < \infty$ und $0 < \theta < 1$, und sei $p$ gegeben durch

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

dann gilt $L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$. Ferner gilt für alle $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_p \le \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

ii) (Inklusion von $L^p$-Räumen) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge. Dann gilt für alle $p > q \ge 1$:

$$L^p(K) \subseteq L^q(K).$$

Zeigen Sie dies.

**Lösung:**

*Bemerkung* Die Hölderungleichung lässt sich leicht auf Paare $p, q, r$ mit der Beziehung

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

verallgemeinern. Dann gilt:

$$\|fg\|_{L^p} = \||fg|^p\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \le_{\text{Hölder}} \||f|^p\|_{L^{\frac{q}{p}}}^{\frac{1}{p}} \cdot \||g|^p\|_{L^{\frac{r}{p}}}^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^q} \cdot \|g\|_{L^r} \qquad (f \in L^q,\, g \in L^r)$$

a) Sei $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R})$. Zeigt man die Abschätzung für die $p$-Norm, so folgt deren Beschränktheit automatisch und $f \in L^p(\mathbb{R})$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^p} &\le_{\text{Hölder}} \|f^{1-\theta}\|_{L^{\frac{p_0}{1-\theta}}} \cdot \|f^{\theta}\|_{L^{\frac{p_1}{\theta}}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left||f|^{1-\theta}\right|^{\frac{p_0}{1-\theta}} dx\right)^{\frac{1-\theta}{p_0}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left||f|^{\theta}\right|^{\frac{p_1}{\theta}} dx\right)^{\frac{\theta}{p_1}} \\ &\le \left(\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_0}\, dx\right)^{\frac{1}{p_0}}\right)^{1-\theta} \cdot \le \left(\left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1}\, dx\right)^{\frac{1}{p_1}}\right)^{\theta} = \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta}\end{aligned}$$

b) Sei $f \in L^p(K)$. Da $p > q \ge 1$, ist

$$1 \ge \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 1 \le r \le \infty.$$

Dann erhält man

$$\|f\|_{L^q} = \|f \cdot 1\|_{L^q} \le \|1\|_{L^r} \cdot \|f\|_{L^p} = vol(K) \cdot \|f\|_{L^p}$$

**Aufgabe 2 (endlich dimensionale Banachräume)**

Beweisen Sie Satz 5.6 unter Verwendung von 5.5. Sei $E$ ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\dim(E) < \infty$

b) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $E$ ist kompakt.

c) Es gibt eine relativ kompakte Umgebung der $0$.

**Lösung:**

a) $\Rightarrow$ b) Sei $A \subseteq$ beschränkt und abgeschlossen. Sei $(a_k) \subset A$ eine Folge. Dann ist $(a_k)$ beschränkt. Nach Satz 5.5 hat $(a_k)$ eine konvergente Teilfolge in $E$. Da $A$ abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert dieser Teilfolge in $A$. Damit ist $A$ kompakt.

b) $\Rightarrow$ c) Betrachte

$$K[0,1] := \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$$

. Diese ist beschränkt, abgeschlossen und trivialerweise eine Nullumgebung. Nach b) ist $K[0,1]$ kompakt, also insbesondere relativ kompakt.

c) $\Rightarrow$ a) Sei $U \subset E$ eine relativ kompakte Umgebung der Null. Angenommen $dim\, E = \infty$, dann gibt es nach 5.5 eine beschränkte Folge $(a_k)$ mit $a_k \leq R > 0 \quad (k \in \mathbb{N})$, die keine konvergente Teilfolge hat. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, sodass nicht unendlich viele Folgenglieder in einer $\varepsilon$-Kugel um einen Punkt in $E$ enthalten sind. Da $U$ Umgebung der $0$ ist, gibts $r > 0$, sodass $K[0,r] \subseteq U$. Daher ist $(b_k)$ mit $b_k := a_k \cdot r/R$ eine Folge in $U$, welche keine konvergente Teilfolge in $E$ hat (Wähle das $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot r/R$). $(b_k)$ hat auch keine in $\overline{U}$ konvergente Teilfolge, denn angenommen doch und sei $a_{k_j}$ diese Teilfolge, dann gilt

$$\| \lim_{j \to \infty} a_{k_j} \| \leq r,$$

und daher ist der Grenzwert in $K[0,r] \subseteq U$ enthalten. Folglich aber auch in $U$, was ausgeschlossen wurde. Daher ist $\overline{U}$ nicht kompakt, und $U$ nicht relativ kompakt. Widerspruch.

**Aufgabe 3 (Eigenschaften von $l^\infty$)**

In der ersten Übung wurde der Begriff separabel eingeführt. Zu zeigen ist:

a) In der ersten Übung wurde der Begriff separabel eingeführt. Zeigen Sie, dass $l^\infty$ nicht separabel ist.

b) Sei $X$ ein unendlich dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es überabzählbar viele unendlich dimensionale Untervektorräume von $X$, deren paarweiser Schnitt endlich dimensional ist. Um ein Beispiel zu konstruieren, wählen Sie sich eine Folge linear unabhängiger Vektoren

$$\mathcal{B} := \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

und definieren Sie zunächst Teilmengen der natürlichen Zahlen $A_j \subseteq \mathbb{N}$ mit $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ überabzählbar wie folgt. Identifizieren Sie $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{Q}$ und wählen Sie eine irrationale Zahl $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und eine Folge rationaler Zahlen, die gegen $j$ geht, aus. Wählen Sie

$$A_j := \{q_k : \ q_k \in \mathbb{Q} \wedge q_k \to j \, (k \to \infty)\}.$$

Betrachten Sie anschließend Teilmengen aus $\mathcal{B}$, welche Sie den $A_j$ zuordnen.

**Lösung:**

a) Angenommen $l^\infty$ sei separabel und $\mathcal{B} := \{(a_k^{(n)}) : \ n \in \mathbb{N}\} \subset l^\infty$ sei eine abzählbare dichte Teilmenge. Das heißt, für $(a_k) \in l^\infty$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $(a_k^{(n)}) \subset \mathcal{B}$ mit

$$\|(a_k^{(n)}) - (a_k)\|_\infty < \varepsilon.$$

Setze dazu

$$b_k := \begin{cases} 0, \text{ für } |a_k^{(k)}| > 1 \\ 1, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt:

$$\|(b_k) - (a_k^{(n)})\|_\infty \geq |b_n - a_n^{(n)}| \geq 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

und $\|(b_k)\|_\infty \leq 2$. Die Teilmenge war also nicht dicht.

b) Seien $A_j$ für $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wie oben definiert. Dann gilt:

$$A_j \cap A_i$$

ist endlich $(i \neq j)$, denn seien $(q_k)$ in $A_j$ und $(p_k)$ in $A_i$ die zugehörigen Folgen, die gegen $j$ bzw. $i$ konvergieren, dann gibt es zu $\varepsilon = \frac{|j-i|}{2}$ ein $N(\varepsilon)$ mit

$$|q_k - j| < \varepsilon \qquad \wedge \qquad |p_k - i| < \varepsilon \qquad (k \geq N(\varepsilon))$$

Dann gilt für alle $k, l \geq N(\varepsilon)$:

$$|q_k - p_l| \geq |i - j| - |i - q_k| - |p_l - j| > |i - j| - 2 \cdot \frac{|i-j|}{2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad q_k \neq p_l$$

Identifiziert man nun $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{N}$, so kann man $A_i$ als Teilmenge von $\mathbb{N}$ auffassen $(i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Wir haben also überabzählbar viele unendliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ gefunden, die endlichen Schnitt haben. Wähle die Untervektorräume:

$$V_j := [\{u_k\}_{k \in A_j}]$$

## Aufgabe 4 (Die Ableitungsabbildung)

a) Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator

$$\frac{d}{dx} : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),\ f \mapsto f',$$

wobei beide Räume mit der Supremumsnorm ausgestattet sind, nicht stetig ist.

b) Finden Sie eine geeignete Norm auf $C^1([0,1])$, sodass die Abbildung stetig ist.

**Lösung:**

a) Betrachte die Folge

$$f_n : [0,1] \to [0,1],\ x \mapsto x^n.$$

Dann gilt: $f_n(x) \leq 1$ und $f_n(1) = 1$. Daher ist also $\|f_n\|_\infty = 1$ und $f_n$ ist stetig differenzierbar $(n \in \mathbb{N})$. Es gilt aber:

$$\left\|\frac{d}{dx} f_n\right\|_\infty \geq \left|\frac{d}{dx} f_n(1)\right| = n \ \to \infty \ (n \to \infty)$$

Das heißt, es gibt keine Schranke $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$\left\|\frac{d}{dx} f\right\|_\infty \leq C\|f\|_\infty.$$

b) Für die Norm $\|\cdot\|_{C^1}$ , auf $C^1([0,1])$ ist der Operator beschränkt. Sei

$$\|u\|_{C^1} := \left(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|u'\|_{L^\infty}^2\right)^{1/2},$$

der Rest ist trivial. Die Normeigenschaften folgen sofort aus den Normeigenschaften der Supremumsnorm.