Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 3

Abgabetermin: 15. November 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (zur Hölderungleichung)

i) (Lyapunovsche Ungleichung) Seien $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ und $0 < \theta < 1$, und sei p gegeben durch

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

dann gilt $L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$. Ferner gilt für alle $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R})$:

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta}.$$

ii) (Inklusion von L^p-Räumen) Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge. Dann gilt für alle $p > q \geq 1$:

$$L^p(K) \subseteq L^q(K).$$

Zeigen Sie dies.

Aufgabe 2 (endlich dimensionale Banachräume)

Beweisen Sie Satz 5.6 unter Verwendung von 5.5. Sei E ein normierter Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\dim(E) < \infty$

b) Jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von E ist kompakt.

c) Es gibt eine relativ kompakte Umgebung der 0.

Aufgabe 3 (Eigenschaften von l^∞)

In der ersten Übung wurde der Begriff separabel eingeführt. Zu zeigen ist:

a) In der ersten Übung wurde der Begriff separabel eingeführt. Zeigen Sie, dass l^∞ nicht separabel ist.

b) Sei X ein unendlich dimensionaler Vektorraum. Dann gibt es überabzählbar viele unendlich dimensionale Untervektorräume von X, deren paarweiser Schnitt endlich dimensional ist. Um ein Beispiel zu konstruieren, wählen Sie sich eine Folge linear unabhängiger Vektoren

$$\mathcal{B} := \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

und definieren Sie zunächst Teilmengen der natürlichen Zahlen $A_j \subseteq \mathbb{N}$ mit $j \in \mathcal{J}$, $\mathcal{J}$ überabzählbar wie folgt. Identifizieren Sie $\mathbb{N}$ mit $\mathbb{Q}$ und wählen Sie eine irrationale Zahl $j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und eine Folge rationaler Zahlen, die gegen j geht, aus. Wählen Sie

$$A_j := \{q_k : \; q_k \in \mathbb{Q} \wedge q_k \to j \, (k \to \infty)\}.$$

Betrachten Sie anschließend Teilmengen aus $\mathcal{B}$, welche Sie den A_j zuordnen.

Hinweis: Bitte wenden.

Aufgabe 4 (Die Ableitungsabbildung)

a) Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator

$$\frac{d}{dx} : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),\ f \mapsto f',$$

wobei beide Räume mit der Supremumsnorm ausgestattet sind, nicht stetig ist.

b) Finden Sie eine geeignete Norm auf $C^1([0,1])$, sodass die Abbildung stetig ist.