Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 4 - Lösungen

Abgabetermin: 22. November 2013 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Gleichgradige Stetigkeit)

Untersuchen Sie folgende Funktionenmengen auf gleichgradige Stetigkeit und Relativkompaktheit in $C([0,1])$:

i)

$$F = \{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}, \text{ mit } f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f_n(x) = \sin(nx)$$

ii)

$$F = \{f_\omega : \omega \in (0,\infty)\}, \text{ mit } f_\omega : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f_\omega(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$$

iii)

$$F = \{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}, \text{ mit } f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f_n(x) = g(x-n) \text{ und } g \in C(\mathbb{R}), \ g(x) = 0 \ (x \notin [0,1])$$

Lösung:

Nach Ascoli-Arzelà ist gleichgradig stetig und beschränkt äquivalent zur relativen Kompaktheit.

i) Die Menge ist nicht gleichgradig stetig, denn

$$|f_n(0) - f_n(\frac{1}{n})| = \sin(1)$$

, aber $|0 - \frac{1}{n}| \to 0 \ \ (n \to \infty)$. Also egal wie klein ich delta mache, es gibt immer eine Funktion in der Menge F , dessen Funktionswertdifferenz $\sin(1)$ bleibt. zu $\varepsilon < \sin(1)$ gibts also kein δ . Die Menge ist nicht gleichgradig stetig. Folglich ist sie auch nicht relativ kompakt.

ii) Die Menge ist gleichgradig stetig, da Sie nach Bemerkung aus der Vorlesung Lipschitzstetige Funktionen enthält, deren Lipschitzkonstante beschränkt ist durch 1 , denn

$$|f_\omega(x) - f_\omega(y)| \leq \sup_{\xi \in [0,1]} \cos(\xi)|x-y| = |x-y|.$$

Die Menge ist auch relativ kompakt, da sie beschränkt. Für $\omega > \pi/2$ ist $\|f_\omega\|_\infty = 1/\omega$. Für $\omega < \pi/2$ ist

$$\|f_\omega\| = \frac{1}{\omega}\sin(\omega) \longrightarrow 0 \qquad (\omega \longrightarrow \infty),$$

also insbesondere beschränkt. Ferner ist die Funktion

$$\omega \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\omega}\sin(\omega) & , \text{für } \omega \in (0,\pi/2] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

stetig und nimmt daher ihr Maximum an.

iii) g ist gleichmässig stetig, da nur auf einem Kompaktum ungleich 0. Die δ-Wahl zu gegebenen $\varepsilon > 0$ für die Stetigkeit ist also unabhängig von der Stelle. Da f_n nur aus verschobenen Funktionen von g besteht, ist F gleichgradig stetig. Auch ist F beschränkt durch $\|g\|_\infty$. Allerdings ist Ascoli-Arzelà nicht anwendbar. da der Definitionsbereich nicht kompakt ist. F ist auch nicht relativ kompakt. Denn betrachte die Folge (n). Diese geht gegen unendlich und auch jede Teilfolge geht gegen unendlich. Dann geht f_n für $n \to \infty$ punktweise gegen die Nullfunktion. Das heißt, jede Teilfolge von (f_n) kann, wenn überhaupt, gegen 0 konvergieren. Allerdings findet man, falls g nicht identisch verschwindet immer $x \in [0,1]$ mit $g(x) \neq 0$ und daher auch $f_n(x+n) \neq 0$. Es geht also keine Teilfolge gegen 0 und daher hat (f_n) keine konvergente Teilfolge. Daher ist F nicht relativ kompakt.

Aufgabe 2 (Ascoli-Arcelà)

Zeigen Sie die aus der Vorlesung verbleibende Implikation des Satzes von Ascoli-Arcelà:
Sei K ein kompakter metrischer Raum und $C(K)$ der zugehörige Banachraum der stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm. Dann gilt:

$$H \subset C(K) \text{ ist kompakt } \implies H \text{ ist abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Lösung:

Sei $H \subseteq C(K)$ kompakt. Dann sind alle $f \in H$ gleichmäßig stetig, da K kompakt ist. Betrachte zu gegebenen $\varepsilon > 0$ die Mengen

$$A_\delta := \{f \in H : \forall x, y \in K \text{ mit } d(x,y) < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}.$$

Diese sind offen, denn Sei $f \in A_\delta$, dann folgt $|f(x) - f(y)| := c < \varepsilon$. Wähle eine Kugel mit Radius $\frac{\varepsilon - c}{2}$ um f, dann gilt für alle g in dieser Kugel:

$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - g(y)| \leq 2\|g - f\|_\infty + c < \varepsilon$$

Ferner ist

$$\bigcup_{\delta > 0} A_\delta$$

eine offene Überdeckung von H. Da reicht eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also $\delta_0 > 0$, sodass $A_{\delta_0} \supseteq H$. Dies ist das gesuchte δ_0 für die Definition der gleichgradigen Stetigkeit. Beschränktheit und Abgeschlossenheit folgt mit Analysis I.

Aufgabe 3 (Ein Vollständigkeitskriterium)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann sind äquivalent:

i) $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

ii) Für jede Folge, für die $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ gilt, konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in $(X, \|\cdot\|)$.

Lösung:

(" $\Rightarrow$ ") ist in der Vorlesung bereits behandelt worden. Sei (x_n) eine Cauchy-Folge in X. Konstruiere eine Folge wie folgt: Sei $\varepsilon_n := 2^{-n}$ $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann gibt es $N(n) \in \mathbb{N}$ mit $|x_k - x_m| < \varepsilon_n$ $(m, k \geq N(n))$. Setze

$$a_n := x_{N(n+1)} - x_{N(n)}.$$

Dann gilt:

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \|a_n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1.$$

und daher konvergiert die Reihe auch im Sinne von metrischen Räumen, also $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_n \in X$. Es ist aber:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{M\to\infty} \sum_{n\leq M} a_n = \lim_{M\to\infty} -x_{N(1)} + x_{N(M+1)} = -x_{N(1)} + \lim_{n\to\infty} x_n \in X.$$

Daher ist auch der Grenzwert in X . X ist also vollständig.

Aufgabe 4 (Algebren)

Ein Algebrahomomorphismus ϕ ist eine lineare Abbildung zwischen zwei Algebren (aufgefasst als Vektorräume), für die zusätzlich für alle x, y im Definitionsbereich gilt $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.

i) Sei X ein kompakter metrischer Raum und bezeichne $C(X,\mathbb{R})$ den Raum der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Sei $x_0 \in X$ fest, zeige Sie, dass durch

$$\alpha_{x_0} : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \mapsto f(x_0)$$

ein Algebrahomomorphismus definiert wird.

ii) Zeigen Sie, dass jeder Algebrahomomorphismus $\phi : C(X,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ von eben solch einer Bauart ist. heißt, es gibt ein $x_0 \in X$ mit $\phi = \alpha_{x_0}$. Gehen Sie dabei (zum Beispiel) wie folgt vor:

1. Zeigen Sie: Falls für alle $x \in X$ gilt $f(x) \neq 0$, dann ist $\phi(f) \neq 0$.
2. Es gibt einen Punkt $x_0 \in X$, sodass aus $\phi(f) = 0$ folgt, dass $f(x_0) = 0$. Nehmen Sie an, das das falsch ist, es also für jedes $y \in X$ eine Funktion $f_y \in C(X,\mathbb{R})$ gibt mit $\phi(f_y) = 0$ und $f_y(y) \neq 0$. Konstruieren Sie mithilfe der Kompaktheit eine Funktion, die nirgends verschwindet, aber von ϕ auf 0 geschickt wird. Benutzen Sie anschließend 1.
3. Folgern Sie die Behauptung.

Lösung:

Zunächst sei bemerkt, dass die Behauptung ii) nur stimmt, wenn $\phi \neq 0$, also es mindestens ein $f \in C(X,\mathbb{R})$ gibt, mit $\phi(f) \neq 0$. Dann ist $\phi(f) = \phi(f \cdot 1) = \phi(f) \cdot \phi(1)$ und daher $\phi(1) = 1$.

Seien $f_1, f_2 \in C(X,\mathbb{R})$, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$, Dann gilt

$$\alpha_{x_0}(f_1 + \lambda f_2) = (f_1 + \lambda f_2)(x_0) = f_1(x_0) + \lambda f_2(x_0) = \alpha_{x_0}(f_1) + \lambda \alpha_{x_0}(f_2).$$

Ferner hat man mit ähnlicher Rechnung $\alpha_{x_0}(f_1 f_2) = \alpha_{x_0}(f_1)\alpha_{x_0}(f_2)$. Wir folgen nun dem Hinweis in ii):

1. Falls $f \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist $1/f \in C(X,\mathbb{R})$ und damit

   $$1 = \phi(1) = \phi(f)\phi(1/f).$$

   Ist nun $\phi(f) = 0$ so folgt der Widerspruch.

2. Angenommen für jedes $y \in X$ gibts ein $f_y \in C(X,\mathbb{R})$ mit $\phi(f_y) = 0$, und $f_y(y) \neq 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f_y(y) > 0$. Da jedes f_y stetig ist, gibt es eine ε_y -Kugel um y mit

   $$f_y(x) > 0 \qquad (x \in U_{\varepsilon_y}(y)).$$

   Dann lässt sich X mit diesen Kugeln überdecken:

   $$X \supseteq \bigcup_{y\in X} U_{\varepsilon_y}(y).$$

Da X kompakt ist, reichen endlich viele dieser Kugeln aus, um X zu überdecken. Das heißt, es gibt y_j , $j = 1..m$ mit

$$X \supseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{\varepsilon_{y_j}}(y_j).$$

Definiere dann $f := \sum_{j=1}^{n} f_{y_j}$. Es gilt $f(x) > 0 \quad (x \in X)$, aber

$$\phi(f) = \sum_{j=1}^{n} \phi(f_{y_j}) = 0$$

. Widerspruch.

3. Sei ϕ nun gegeben und sei x_0 der zugehörige Punkt, für den aus $\phi(f) = 0$ folgt, dass $f(x_0) = 0$ $f \in C(X, \mathbb{R})$ ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 = \phi(f) - \phi(f) &= \phi(f) - \phi(1) \cdot \phi(f) = \phi(f) - \phi(\phi(f)) = \phi(f - \phi(f)) \\ \Rightarrow (f - \phi(f))(x_0) = 0 \ &\Leftrightarrow f(x_0) = \phi(f)(x_0) = \phi(f). \end{aligned}$$

Hierbei wird $\phi(f)$ teilweise als konstante Funktion aufgefasst. Es gilt also für alle $f \in C(X, \mathbb{R})$, dass

$$\alpha_{x_0}(f) = \phi(f)$$

und damit $\alpha_{x_0} = \phi$.