Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanlysis Übungsblatt 4

Abgabetermin: 22. November 2013 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Gleichgradige Stetigkeit)

Untersuchen Sie folgende Funktionenmengen auf gleichgradige Stetigkeit und Relativkompaktheit in $C([0,1])$:

i)
$$F = \{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}, \text{ mit } f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = \sin(nx)$$

ii)
$$F = \{f_\omega : \omega \in (0,\infty)\}, \text{ mit } f_\omega : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f_\omega(x) = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$$

iii)
$$F = \{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}, \text{ mit } f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f_n(x) = g(x-n) \text{ und } g \in C(\mathbb{R}),\ g(x) = 0\ (x \notin [0,1])$$

Aufgabe 2 (Ascoli-Arcelà)

Zeigen Sie die aus der Vorlesung verbleibende Implikation des Satzes von Ascoli-Arcelà:
Sei K ein kompakter metrischer Raum und $C(K)$ der zugehörige Banachraum der stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm. Dann gilt:

$$H \subset C(K) \text{ ist kompakt } \implies H \text{ ist abgeschlossen, beschränkt und gleichgradig stetig.}$$

Aufgabe 3 (Ein Vollständigkeitskriterium)

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann sind äquivalent:

i) $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig.

ii) Für jede Folge, für die $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ gilt, konvergiert auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ in $(X, \|\cdot\|)$.

Hinweis: Bitte wenden.

Aufgabe 4 (Algebren)

Ein Algebrahomomorphismus ist eine lineare Abbildung zwischen zwei Algebren (aufgefasst als Vektorräume), für die zusätzlich für alle x, y im Definitionsbereich gilt $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$.

i) Sei X ein kompakter metrischer Raum und bezeichne $C(X, \mathbb{R})$ den Raum der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Sei $x_0 \in X$ fest, zeige Sie, dass durch

$$\alpha_{x_0} : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \mapsto f(x_0)$$

ein Algebrahomomorphismus definiert wird.

ii) Zeigen Sie, dass jeder Algebrahomomorphismus $\phi : C(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ von eben solch einer Bauart ist. heißt, es gibt ein $x_0 \in X$ mit $\phi = \alpha_{x_0}$. Gehen Sie dabei (zum Beispiel) wie folgt vor:

1. Zeigen Sie: Falls für alle $x \in X$ gilt $f(x) \neq 0$, dann ist $\phi(f) \neq 0$.
2. Es gibt einen Punkt $x_0 \in X$, sodass aus $\phi(f) = 0$ folgt, dass $f(x_0) = 0$. Nehmen Sie an, das das falsch ist, es also für jedes $y \in X$ eine Funktion $f_y \in C(X, \mathbb{R})$ gibt mit $\phi(f_y) = 0$ und $f_y(y) \neq 0$. Konstruieren Sie mithilfe der Kompaktheit eine Funktion, die nirgends verschwindet, aber von ϕ auf 0 geschickt wird. Benutzen Sie anschließend 1.
3. Folgern Sie die Behauptung.