Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 5 - Lösungen

Abgabetermin: 29. November 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Kompakte Operatoren)

a) Zeigen Sie, dass der Inklusionsoperator:

$$\iota:\, C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),\ \iota(f) = f$$

kompakt ist. Dabei trägt $C^1([0,1])$ die Norm

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

b) Sei E ein Untervektorraum von $C^1([0,1])$ und sei E abgeschlossen bezüglich der Norm von $C([0,1])$. Dann ist E endlich dimensional.

Lösung:

a) Sei (f_n) eine beschränkte Folge in $C^1([0,1])$, Dann ist $\|f_n'\|_\infty \leq \|f_n\|_{C^1} \leq C$ für ein $C > 0$. Nach dem Mittelwertsatz gilt also für alle $x, y \in [0,1]$, sowie $n \in \mathbb{N}$:

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|.$$

Das Bild der Menge $F := \{f_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ist also beschränkt (in $C([0,1])$) und gleichgradig stetig auf $[0,1]$. Nach Arzelà-Ascoli ist sie relativ kompakt. Das heißt (f_n) hat eine konvergente Teilfolge in $\overline{F} \subset C([0,1])$. Daher ist ι kompakt.

b) E ist abgeschlossen bezüglich C^0-Norm, daher ist $(E, \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum. gilt $\|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty = \|f\|_{C^1}$. Daher folgt aus $\|f-g\|_{C^1} \leq R$ stets $\|f-g\|_\infty \leq R$ und damit sind C^1-Kugeln immer in C-Kugeln mit gleichem Radius enthalten. Ist E daher C^0-abgeschlossen, so ist $C^1([0,1]) \setminus E$ C^0-offen, daher C^1-offen und damit E C^1-abgeschlossen. E ist also auch bezüglich $(E, \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum. Mit dem Satz über die Inverse Abbildung sind beide Normen auf E bereits äquivalent. Sei also $B \subseteq E$ beschränkt und abgeschlossen bezüglich C^0, so auch bezüglich C^1 und damit C^0-kompakt. Es folgt, dass E endlich dimensional ist.

Aufgabe 2 (Kompakte Operatoren)

Sei $k \in C([0,1]^2)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$(Kf)(x) := \int_{[0,1]} k(x,y) f(y)\, dy.$$

einen Operator von $L^2([0,1])$ nach $C([0,1])$ definiert und K kompakt ist.

Zusatz (ohne Wertung): $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ ist für $k \in L^2([0,1]^2)$ auch kompakt.

b) Was folgt daraus für die Dimension des Lösungsraumes der Integralgleichung

$$f = \int_{[0,1]} k(\cdot, y) f(y) dy?$$

Lösung:

a) Zunächst zeigt man, dass Kf stetig ist. Sei (x_k) eine Folge in $[0,1]$ und $x_k \to x \quad (k \to \infty)$. Dann gilt

$$\left| \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} k(x_k, y) f(y)\, dy \right| \leq \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \|k(x,\cdot)\|_{L^2([0,1]} \cdot \|f\|_{L^2([0,1])} \leq C < \infty.$$

Daher kann man den Limes in das Integral hineinziehen und erhält mittels Stetigkeit von k, dass

$$\lim_{k\to\infty} Kf(x_k) = Kf(x).$$

Sei nun (f_n) beschränkte eine Folge in $L^2([0,1])$, So erhält man ähnlich wie in der vorhergehenden Abschätzung:

$$\|Kf_n\|_\infty \leq \|k\|_{L^\infty([0,1]^2)} \cdot \|f_n\|_{L^2([0,1])} \leq C < \infty$$

Das Bild ist also beschränkt. Kf_n ist auch gleichgradig stetig, denn für alle $x_1, x_2 \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|Kf_n(x_1) - Kf_n(x_2)| \leq \int_{[0,1]} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|\, f(y)\, dy$$
$$\leq \sup_{y\in[0,1]} |k(x_1,y) - k(x_2,y)| \cdot \|f_n\|_{L^2([0,1])} \leq C \sup_{y\in[0,1]} |k(x_1,y) - k(x_2,y)|$$

Da k stetig auf $[0,1]^2$ ist, ist k gleichmässig stetig. Das heißt zu jedem $\varepsilon > 0$ gibts $\delta > 0$ mit $|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)| < \delta \Rightarrow |k(x_1,y_1) - k(x_2,y_2)| < \varepsilon/C \quad ((x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1]^2)$. Das heißt für alle $x_1, x_2 \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ ist

$$|Kf_n(x_1) - Kf_n(x_2)| < \varepsilon$$

Die Menge $\{Kf_n\}$ ist dann nach Arzelà-Ascoli also relativ kompakt. Das heißt, wie in Aufgabe 1 hat (f_n) eine in $C([0,1])$ konvergente Teilfolge. K ist also kompakt.
Zusatz: Benutze, dass k Grenzwert von Treppenfunktionen ist. Für Treppenfunktionen k hat K endlich dimensionales Bild, ist also kompakt. Da kompakte Operatoren abgeschlossen in den beschränkten linearen Operatoren sind, ist auch der Grenzwert kompakt.

b) Nach Satz 9.1 ist die Dimension des Lösungsraumes, also der Nullraum von $(I - K)$ endlich dimensional.

Aufgabe 3 (Kompakte Operatoren)

Sei $(\alpha_n) \in l^\infty$ Dann ist der Operator

$$K : l^2 \longrightarrow l^2,\ (x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$$

genau dann kompakt, wenn α_n eine Nullfolge ist.

Lösung: $(\Rightarrow)$: Sei (α_n) keine Nullfolge. Dann gibts ein $1 > d > 0$ mit $\alpha_{n_j} \geq d$ für eine Teilfolge (α_{n_j}). Sei $K[0,1]$ die abgeschlossene Einheitskugel in l^2. Da die Einheitskugel in l^2 nicht kompakt ist, wähle eine Folge $(c^{(k)})$ aus $K[0,1] \subset l^2$, welche keine konvergente Teilfolge hat und zusätzlich mit $c_n^{(k)} = 0$ für $n \neq n_j$ für ein j und jedes $(k \in \mathbb{N})$. (Zum Beispiel jene l^2-Folgen, die nur eine eins bei n_j haben $(j \in \mathbb{N})$) Dann gilt:

$$\|K(c^{(k)})\|_2 \geq d\|c^{(k)}\|_2 \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

und $K(c^{(k)})$ hat keine konvergente Teilfolge, denn angenommen doch, also $K(c^{(k_l)}) \to \gamma \in l^2$ für eine Teilfolge (beachte $\gamma_m = 0$ für $m \neq n_j$ wie oben), dann gilt:

$$\|K(c^{(k_l)}) - \gamma\|_{l^2}^2 = \sum_{l\in\mathbb{N}}^{\infty} |K(c^{(k_l)})_m - \gamma_m|^2 \geq d^2 \sum_{m\in\mathbb{N}}^{\infty} |c_m^{(k_l)} - \frac{\gamma_m}{\alpha_m}|^2 = d^2 \; \|c_m^{(k_l)} - \frac{\gamma_m}{\alpha_m}\|^2$$

und damit dann $c^{(k_l)} \to \gamma/\alpha \in l^2$, was zum Widerspruch führt. Daher hat auch das Bild keine konvergente Teilfolge, obwohl $(c^{(k)})$ beschränkt war. K ist also nicht kompakt.
$(\Leftarrow)$ Sei α_n Nullfolge und sei $(a_k^{(n)})$ eine beschränkte Folge, $\|(a_k^{(n)})\|_{l^2} \leq M$ für ein $M \in \mathbb{R}$. Für jede Komponentenfolge $a_k^{(n)}$, $k \in \mathbb{N}$ wähle sukzessive Teilfolgen, sodass

$$a_k^{(n_j)} \to a_k \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Dann konvergiert $K(a_k^{(n_j)})$ gegen $K(a_k)$ in l^2. Das sieht man wie folgt: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle zu $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon/8M^2$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_k^2| < \widetilde{\varepsilon}$ $(k \geq N)$. Sei ferner j so groß, dass $\sum\limits_{k\leq N} |\alpha_k^2| \, |a_k^{(n_j)} - a_k|^2| < \varepsilon/2$ ist. Dann gilt:

$$\|K(a_k^{(n_j)}) - K(a_k)\|_{l^2}^2 = \sum_{k\leq N} |\alpha_k^2| \, |a_k^{(n_j)} - a_k|^2 + \sum_{k>N} |\alpha_k^2| \, |a_k^{(n_j)} - a_k|^2$$
$$\leq \sum_{k\leq N} |\alpha_k^2| \, |a_k^{(n_j)} - a_k|^2 + \tilde{\varepsilon} \cdot 4M^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Aufgabe 4 (Volterra Operator)

Berechnen Sie Norm und Spektralradius des Volterra Operators

$$T : \, C([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1],\mathbb{R}), \, f \mapsto \int_0^y f(x)\,dx.$$

Lösung:

$$\|T\| = \sup_{f\in C([0,1])} \frac{\|Tf\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq \sup_{y\in[0,1]} \int_0^y 1\,dy = 1$$

und

$$\|T(1)\|_\infty = \|y\|_\infty = 1.$$

Daher ist $\|T\| = 1$.
Das Volumen eines n-dimensionalen Simplex mit Kantenlänge a ist $vol(S_n^a) = \frac{1}{n!}a^n$. Das sieht man zum Beispiel per Induktion. Sei $\chi_{\{x_n \leq x_{n-1} \leq \cdots \leq x_1 \leq a\}}$ die charakteristische Funktion des Simplex. Dann ist gilt:

$n = 1$

$$vol(S_1^a) = \int_{[0,a]} \chi_{\{x_1 \leq a\}}\,dx_1 = \int_0^a 1\,dx_1 = a$$

$n \to n+1$ Die Behauptung gelte für alle $n \leq N \in \mathbb{N}$, dann ist

$$vol(S_{n+1}^a) = \int_{[0,a]^{n+1}} \chi_{\{x_{n+1} \leq x_n \leq \cdots \leq x_1 \leq a\}}\,dx_{n+1}dx_n \cdots dx_1 = \int_{[0,a]^{n+1}} \frac{1}{n!}x_1^n \, \chi_{\{x_1 \leq a\}}dx_1 = \frac{1}{(n+1)!}a^{n+1}.$$

Nun ist $\|T^n\| \leq vol(S_n^1)$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n!}1^n\right)^{\frac{1}{n}} = 0$$

. Der Spektralradius von T ist daher 0.

*****Aufgabe 5 (Neumann-Reihen)*** ohne Wertung**

i) Sei $E \neq \{0\}$ ein Banachraum, Sei $A := 2 \cdot I$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Neumann-Reihe divergiert, obwohl $I - A$ invertierbar ist und das Inverse stetig ist.

ii) Sei E ein normierter Raum, $A \in L(E)$ und $y \in E$. Die Neumann-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n y$$

konvergiere gegen $x \in E$. Zeigen Sie, dass $(I - A)x = y$ gilt.

iii) Sei E ein normierter Raum und sei $A \in L(E)$. Zeigen Sie, folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(I - A)$ ist injektiv und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n y$ konvergiert für alle $y \in (I - A)(E)$
2. A^n konvergiert punktweise gegen 0 in E.

Hinweis: $(I - A)x = y \;\Rightarrow\; x = y + Ay + \cdots + A^{n-1}y + A^n x.$