**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

# Funktionalanalysis Übungsblatt 5

Abgabetermin: 29. November 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

## Aufgabe 1 (Kompakte Operatoren)

a) Zeigen Sie, dass der Inklusionsoperator:

$$\iota : C^1([0,1]) \longrightarrow C([0,1]),\ \iota(f) = f$$

kompakt ist. Dabei trägt $C^1([0,1])$ die Norm

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

b) Sei $E$ ein Untervektorraum von $C^1([0,1])$ und sei $E$ abgeschlossen bezüglich der Norm von $C([0,1])$. Dann ist $E$ endlich dimensional.

## Aufgabe 2 (Kompakte Operatoren)

Sei $k \in C([0,1]^2)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$(Kf)(x) := \int_{[0,1]} k(x,y) f(y)\, dy.$$

einen Operator von $L^2([0,1])$ nach $C([0,1])$ definiert und $K$ kompakt ist.

*Zusatz (ohne Wertung):* $K : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ ist für $k \in L^2([0,1]^2)$ auch kompakt.

b) Was folgt daraus für die Dimension des Lösungsraumes der Integralgleichung

$$f = \int_{[0,1]} k(\cdot, y) f(y) dy?$$

## Aufgabe 3 (Kompakte Operatoren)

Sei $(\alpha_n) \in l^\infty$ Dann ist der Operator

$$K : l^2 \longrightarrow l^2,\ (x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$$

genau dann kompakt, wenn $\alpha_n$ eine Nullfolge ist.

## Aufgabe 4 (Volterra Operator)

Berechnen Sie Norm und Spektralradius des Volterra Operators

$$T :\ C([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow C([0,1], \mathbb{R}),\ f \mapsto \int_0^y f(x)\, dx.$$

## ***Aufgabe 5 (Neumann-Reihen)*** ohne Wertung

i) Sei $E \neq \{0\}$ ein Banachraum, Sei $A := 2 \cdot I$. Zeigen Sie, dass die zugehörige Neumann-Reihe divergiert, obwohl $I - A$ invertierbar ist und das Inverse stetig ist.

ii) Sei $E$ ein normierter Raum, $A \in L(E)$ und $y \in E$. Die Neumann-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n y$$

konvergiere gegen $x \in E$. Zeigen Sie, dass $(I - A)x = y$ gilt.

iii) Sei $E$ ein normierter Raum und sei $A \in L(E)$. Zeigen Sie, folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $(I - A)$ ist injektiv und $\sum_{n=0}^{\infty} A^n y$ konvergiert für alle $y \in (I - A)(E)$
2. $A^n$ konvergiert punktweise gegen $0$ in $E$.

*Hinweis:* $(I - A)x = y \;\Rightarrow\; x = y + Ay + \cdots + A^{n-1}y + A^n x.$