Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 6 - Lösungen

Abgabetermin: 6. Dezember 2013 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis,
Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Hahn-Banach)

a) Seien E, F normierte Räume und $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$ und $y_0 \in F$. Zeigen Sie, dass es eine stetige lineare Abbildung $T \in L(X, Y)$ gibt mit $Tx_0 = y_0$.

b) Zeigen Sie, dass der Dualraum Vektoren trennt, das heißt, zu $x_1, x_2 \in E$ mit $x_1 \neq x_2$ gibt es ein Funktional $\phi \in E'$ mit $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.

Lösung:

a) Sei $U \subset E$, $U := [x_0]$, definiere auf U die Abbildung

$$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}, \phi(x) = \lambda,$$

wobei λ durch $\lambda x_0 = x$ bestimmt ist. Diese ist linear auf U und beschränkt durch die (Halb-)norm $\frac{1}{\|x_0\|}\| \cdot \|$. Nach dem Fortsetzungssatz kann man ϕ zu einem Funktional ψ auf ganz E fortsetzen. Definiere dann $T : E \longrightarrow F, Tx := \psi(x) \cdot y_0$.

b) Sind x_1, x_2 linear abhängig, so setze die Normabbildung auf $[x_1]$ wie in a) fort. Sind x_1, x_2 linear unabhängig, so betrachte die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to E,\ f(t) = \|tx_1 - x_0\|.$$

Da f stetig ist und gegen unendlich strebt für $t \to \pm\infty$, nimmt f sein Minimum an, dieses ist aber echt grösser als 0, da sonst die lineare Unabhängigkeit verletzt würde. Daher ist $\inf f = \inf\limits_{y \in [x_1]} \|y - x_0\| > 0.$ Auch hier kann Hahn-Banach angewandt werden um ein Funktional zu finden, dass 0 ist auf $[x_1]$ und 1 an der Stelle x_0.

Aufgabe 2 (Annihilatoren und Quotientenräume)

Sei E ein normierter Vektorraum und $U \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Sei der Annihilator eines Vektorraums wie in der Vorlesung definiert. Bezeichne

$$h :\ E \longrightarrow E/U$$

den kanonischen Homomorphismus. Zeige

a) die Abbildung

$$T :\ (E/U)' \longrightarrow E', T(\psi) = \psi \circ h$$

ist ein Normisomorphismus von $(E/U)'$ nach $U^\perp$.

b) Die Abbildung

$$S:\ (E'/U^{\perp}) \longrightarrow U',\ S(x'+U^{\perp}) = x'|_U$$

ist ein Normisomorphismus von $E'/U^{\perp}$ nach U'.

Lösung:

Sei $\psi \in (E/U)'$. Dann gilt:

$$\|T\psi\|_{E'} = \sup_{x\in E} \frac{|(\psi \circ h)(x)|}{\|x\|_E} = \sup_{[x]\in E/U} \sup_{x\in[x]} \frac{|(\psi([x])|}{\|x\|_E}$$
$$= \sup_{[x]\in E/U} \frac{|(\psi([x])|}{\inf\limits_{x\in[x]} \|x\|_E} = \sup_{[x]\in E/U} \frac{|(\psi([x])|}{\|[x]\|_{E/U}} = \|\psi\|_{(E/U)'}$$

Daraus folgt auch Injektivität. Ferner ist $T\psi \in U^{\perp}$, denn für $y \in U$ ist $h(y) = 0$. Sei nun $[x] \in E/U$, definiere dann $[\psi] \in (E/U)'$ durch $[\psi]([x]) = \psi(x)$. Man rechne leicht nach, dass der Wert von $[\psi]([x])$ unabhängig vom Repräsentanten ist. Daraus folgt dann Surjektivität.
Für den zweiten Teil rechnet man nach:

$$\|S(x'+U^{\perp})\|_{U'} = \sup_{y\in U} \frac{|x'|_U(y)|}{\|y\|} = \inf_{u'\in U^{\perp}} \sup_{y\in U} \frac{|x'|_U(y) + u'(y)|}{\|y\|}$$
$$\leq \inf_{u'\in U^{\perp}} \sup_{x\in E} \frac{|x'(x)+u'(x)|}{\|x\|} = \inf_{u'\in U^{\perp}} \|x'+u'\| = \|[x']\|_{E'/U^{\perp}}.$$

Betrachte das Funktional ϕ, welches man als Fortsetzung des Funktionals $x'|_U$ auf U nach E erhält. Es gilt nach Hahn-Banach $\|x'|_U\|_{U'} = \|\phi\|_{E'}$ und $\phi - x' \in U^{\perp}$. Daher ist

$$\|S(x'+U^{\perp})\|_{U'} = \|\phi\| = \sup_{x\in E} \frac{|x'(x) + (\phi - x')(x)|}{\|x\|}$$
$$\geq \inf_{u'\in U^{\perp}} \sup_{x\in E} \frac{|x'(x)+u'(x)|}{\|x\|} = \inf_{u'\in U^{\perp}} \|x'+u'\| = \|[x']\|_{E'/U^{\perp}}.$$

Die Surjektivität erhält man, indem man dem Bild $u' \in U'$ mit Fortsetzung $\phi \in E'$ das Urbild $\phi + U^{\perp}$ zuordnet.

Aufgabe 3 (Darstellung von Funktionalen auf l^{∞})

Zeigen Sie, es gibt ein Funktional $m \in (l^{\infty})'$ mit folgenden Eigenschaften

1. $$\liminf_{k\to\infty} x_k \leq m(x) \leq \limsup_{k\to\infty} x_k \qquad (x \in l^{\infty})$$

2. $$m(x_2, x_3, x_4, \cdots) = m(x_1, x_2, x_3, \cdots) \qquad (x \in l^{\infty})$$

Zeigen Sie ferner, dass es kein Element $\alpha \in l^1$ gibt, mit $m(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$.

Lösung:

Sei (1) die Folge, für die jedes Glied 1 ist und T der Shift-Operator, also $T : l^\infty \to l^\infty$, $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, x_4, \cdots)$, betrachte den Unterraum

$$W := \{x - Tx,\ x \in l^\infty\}.$$

Dann gilt $\|y + c \cdot (1)\| \geq |c| \ \ (c \in \mathbb{R},\ y \in W)$, denn sei $x \in l^\infty$ mit $y = x - Tx$, dann

$$\|x - Tx + c\| \ \geq \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |x_k - x_{k+1} + c| \geq \frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N} x_k - x_{k+1} + c\right| = \frac{1}{N}|c + x_1 - x_{N+1}| \longrightarrow c \qquad (N \longrightarrow \infty).$$

Ferner folgt, dass $\mathbb{R}(1) \cap \overline{W} = \{0\}$. Definiere dann ein lineares Funktional ϕ_0 auf $\mathbb{R}(1) \oplus W$ durch $\phi_0(x - Tx + c) := c$. Es gilt $\phi_0(z) \leq \|z\|$. Dann setze ϕ_0 mit Hahn-Banach zu einem linearen Funktional ϕ auf ganz l^∞ fort. Dann erfüllt ϕ die oben genannten Bedingungen:
ϕ ist nicht negativ, falls (x_n) eine nicht negative Folge ist, das heißt $x_n \geq 0 \ \ (n \in \mathbb{N})$.. Sei nämlich (x_n) nicht negativ, definiere $y := (x_n/\|x\|)$ Dann ist $\|(1) - y\| \leq 1$ und daher $1 - \phi(y) = \phi(1 - y) \leq \|1 - y\| \leq 1$. Also $\phi(x) = \|x\|\phi(y) \geq 0$.
Um Zu zeigen, dass $\liminf x_n \leq \phi(x_n)$ gilt, sei $\alpha < \liminf x_n$ beliebig. Dann gibts ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_n \geq \alpha \ \ (n \geq N)$. Es folgt, dass $T^N x_n - \alpha$ eine nicht negative Folge ist. Dann ist

$$\alpha = \phi(\alpha) = \phi(\alpha - T^N x_n) + \phi(T^N x_n) \leq \phi(T^N x_n) = \phi(x_n).$$

Da α beliebig war gilt $\liminf x_n \geq \phi(x_n)$. Für $\limsup$ geht die Abschätzung ähnlich. Daher folgt auch, dass ϕ den Limes auf dem Raum c der konvergenten Folgen fortsetzt.
Angenommen es gibt $\alpha \in l^1$ mit $m(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$. Mit Translationsinvarianz folgt für $(x_n) := (e_n)$, dass $\alpha_n = \alpha_{n+1} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Daher ist α konstant und da $\alpha \in l^1$ folgt $\alpha = 0$. Daher ist $m = 0$, was einen Widerspruch ergibt.

Aufgabe 4 (Summe abgeschlossener Untervektorräume)

In der Vorlesung wurde gesehen, dass die Summe eines abgeschossenen Unterraums und eines endlich dimensionalen Unterraums abgeschlossen ist. Die Summe von zwei abgeschlossenen Unterräumen ist aber nicht notwendigerweise ein abgeschlossener Unterraum. Verifizieren Sie, dass das Folgende ein Gegenbeispiel liefert: Betrachte $l^2(\mathbb{N})$ mit den Basisvektoren $e_k := (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$ und den Unterräumen

$$L_1 := \overline{[e_{2k} :\ k \in \mathbb{N}]} \qquad L_2 := \overline{[e_{2k+1} + k\, e_{2k} :\ k \in \mathbb{N}]}.$$

Lösung:

Zunächst kann jeder Vektor e_n dargestellt werden als Summe von Elementen in L_1 und L_2 durch

$$e_n := \begin{cases} e_n, \text{ für } n \text{ gerade}, \\ e_{2k+1} + ke_{2k} - ke_{2k}, \text{ für } n = 2k+1 \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Falls Die Summe abgeschlossen ist, muss Sie bereits ganz l^2 sein. Wir zeigen, dass das nicht so ist. Die Summe ist direkt, daher kann jedes Element in $L_1 + L_2$ eindeutig als Summe eines Elementes in L_1 mit einem Element in L_2 dargestellt werden. Dann wird ein beliebiges $(a_k) \in l^2$ in eindeutiger Weise zerlegt in

$$\begin{aligned}(a_k) &:= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k e_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} a_{2k} e_{2k} + \sum_{k=1}^{N} a_{2k+1} e_{2k+1} \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (a_{2k} - k a_{2k+1}) e_{2k} + \sum_{k=1}^{N} a_{2k+1}(e_{2k+1} + k e_{2k})\end{aligned}$$

$$(a_k) = (0, a_2 - a_3, 0, a_4 - 2a_5, 0, \cdots) + (a_1, a_3, a_3, 2a_5, a_5, \cdots)$$

Betrachtet man zum Beispiel $a_n = \frac{1}{n^{3/4}}$, so ist keiner der Summanden in l^2 , denn

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}(a_{2k} - ka_{2k+1})e_{2k}\right\|_{l^2}^2 = \sum_{k=1}^{N}\left|\left(\frac{1}{(2k)^{3/4}} - k\frac{1}{(2k+1)^{3/4}}\right)\right|^2 \geq \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{1-k}{(2k+1)^{3/4}}\right|^2 = \infty.$$

Den anderen Summanten bei Bedarf ähnlich abschätzen.