Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 7

Abgabetermin: 13. Dezember 2013 , 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Nirgends differenzierbare Funktionen)

Betrachten Sie den Banachraum $E := C([0,1],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es auf $[0,1]$ stetige Funktionen gibt, die an keiner Stelle differenzierbar sind. Zeigen Sie ferner, dass solche Funktionen sogar dicht liegen.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen

$$A_n := \left\{ f \in E : \exists x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \forall h \in (0, \frac{1}{n}) : \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n \right\}$$

und verwenden Sie den Satz von Baire.

Lösungen: A_n sind abgeschlossen $(n \in \mathbb{N})$, denn sei (f_k) konvergente Folge in A_n , dann gibt es (x_k) Folge in $[0, 1-1/n]$, sodass für alle $h \in (0, 1/n)$ gilt:

$$\left| \frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} \right| \leq n \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Da (x_k) eine beschränkte Folge ist, wähle eine Teilfolge, immernoch mit (x_k) bezeichnet, mit $x_k \to x \in [0, 1-1/n]$ $(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge erhält man dann mittels Stetigkeit von f_n, f und dem Betrag, dass

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{f_k(x_k + h) - f_k(x_k)}{h} \right| = \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq n,$$

und also $f \in A_n$.
Ferner ist $E \setminus A_n$ dicht in E $(n \in \mathbb{N})$. Für $f \in E \setminus A_n$ gibts trivialerweise in jeder Umgebung ein $g \in E \setminus A_n$, nämlich $g = f$. Für $f \in A_n$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, wähle $g_k := f + \varepsilon/2 \cos(kx)$. Es ist $\|f - g_k\|_\infty = \varepsilon/2$ Sei $x \in [0, 1-1/2]$ beliebig. Wähle k so groß, dass einerseits $|x - (x + 1/k)| < \delta$ (falls $x + 1/k \notin [0, 1-1/n]$, wähle stattdessen $x - 1/k$), wobei δ das gemäß der Stetigkeit von f gewählte ist, sodass $|f(x) - f(x+1/k)| < \varepsilon/4$ ist, andererseits $|\cos(kx) - \cos(kx+1)| \geq 1$ und drittens $k > 4n/\varepsilon$. gilt. Man erhält dann für beliebiges $x \in [0, 1-1/n]$:

$$\left| \frac{g_k(x+1/k) - g_k(x)}{1/k} \right| = \left| \frac{f(x+1/k) - f(x) + \frac{\varepsilon}{2}(\cos(kx+1) - \cos(kx))}{1/k} \right|$$
$$\geq k \left(\frac{\varepsilon}{2} |\cos(kx+1) - \cos(kx)| - |f(x+1/k) - f(x)| \right) > k \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} \right) > n.$$

Daher ist g_k mit k wie oben in $E \setminus A_n$. Komplementbildung der Mengen in der Aussage im Satz von Baire liefert, dass abzählbare Durchschnitte dichter offener Mengen dicht sind. Daher ist

$$E \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus A_n)$$

dicht in E . Insbesondere kann $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ keine inneren Punkte haben und daher nicht ganz E sein.

Aufgabe 2 (Satz von Baire)

Sei $f \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ und für jedes $x \in [0,1]$ gebe es ein $n(x) \in \mathbb{N}$, sodass für die $n(x)$-te Ableitung $f^{(n(x))}(x) = 0$ gilt. Dann ist f ein Polynom auf $[0,1]$. Führen Sie den Beweis anhand der folgenden Schritte durch:

- Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Baire, dass es ein abgeschlossenes Interval I gibt und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad (x \in I).$$
Ferner sei I maximal bezüglich dieser Eigenschaft gewählt in dem Sinne, dass aus $f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in I')$ mit $I' \supseteq I$ stets folgt $I = I'$. Dann stimmt dort f mit einem Polynom überein

- Falls $I \neq [0,1]$, führen Sie das Gleiche auf $[0,1] \setminus I$ immer wieder durch, sodass sie eine Folge abgeschlossener Intervalle $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ erhalten mit $[0,1] \supset \bigcup I_k$. Nun haben Sie abzählbar viele Intervalle, auf denen f jeweils mit einem Polynom überein stimmt.

- Betrachten Sie das Innere $\mathring{I}_k$ bezüglich der Teilraumtopologie von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$, also die größte Menge, die Schnitt einer in $\mathbb{R}$ offenen Menge mit $[0,1]$ ist, und welche komplett in I_k liegt. Dazu definieren Sie
$$H := [0,1] \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathring{I}_k.$$
Argumentieren Sie, dass H abgeschlossen in $[0,1]$ ist und das H keine isolierten Punkte hat. Dann kann man jeden Punkt x_0 als Grenzwert einer Folge in $H \setminus \{x_0\}$ darstellen.
Hinweis: Falls H einen isolierten Punkt $x \in H$ hat, so ist x Endpunkt von zwei maximalen Intervallen. Führen Sie dies zum Widerspruch.

- Was können Sie folgern, wenn $H = \emptyset$ ist.

- Nehmen Sie an, H sei nicht leer. Betrachten Sie H als vollständigen metrischen Raum (mit Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ wie oben). Zeigen Sie mittels Satz von Baire, dass es eine offene Kugel U in H gibt und $n \in \mathbb{N}$, mit $f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in U)$ ähnlich wie im ersten Teil. Das heißt per Definition der Teilraumtopologie, es gibt ein offenes Interval $J \subseteq [0,1]$, sodass $f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in J \cap H)$. Was folgt für höhere Ableitungen aus der Eigenschaft, dass jeder Punkt von H Häufungspunkt ist? Da H abgeschlossen in $[0,1]$ ist, gibt es Intervalle $K \subset [0,1]$ im Komplement $J \setminus H$. Dort gibt es nach Definition von H ein $m > 0$ mit $f^{(m)}(x) = 0$ $x \in K$. Zeigen Sie, dass dann $f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in K)$ gilt.

- Folgern Sie aus $f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in J)$, dass J keine Punkte aus H entält und daher H leer sein muss und es daher von Anfang an nur ein Interval I geben konnte, auf dem f mit einem Polynom übereinstimmt.

Lösung: Die Lücken in dem fast schon vollständigen Beweis sind die folgenen:

- $A_n := \{x \in [0,1] : f^{(n)}(x) = 0\}$. Dann gilt, A_n ist abgeschlossen aufgrund der Stetigkeit von $f^{(n)}$. Ferner gilt: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = [0,1]$ und $[0,1]$ ist vollständiger metrischer Raum. Daher hat eines der A_n bereits ein abgeschlossenes Interval I in sich, sodass $f^n(x) = 0$ $(x \in I)$ gilt. Dann stimmt f bereits mit einem Polynom überein (aufintegrieren).

- Sei I_k eine Folge von Intervallen dann ist $H = [0,1] \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathring{I}_k$ als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Angenommen x_0 sei isolierter Punkt in H, dann ist x_0 Randpunkt zweier Intervalle I_1, I_2. Auf diesen Intervallen gibt es zwei Zahlen o.B.d.A $m \leq n$ mit $f^{(n)} = 0$ auf I_1 und $f^{(m)} = 0$ auf I_2.Es gilt also mit der Stetigkeit der Ableitungen von f, dass $f^{(n)} = 0$ $(x \in I_1 \cup \{x_0\} \cup I_2)$. Dann ist I_1 nicht maximal gewesen, Widerspruch.

- Falls $H = \emptyset$ ist man fertig, Denn dann wird $[0,1]$ von offenen Intervallen überdeckt, wovon endlich viele ausreichen, da $[0,1]$ kompakt ist. Man wählt dann das größte n aus mit $f^{(n)} = 0$ auf einem I_{k_0} der endlichen Teilüberdeckung von $[0,1]$. Bemerkung: ist $f^{(n)} = 0$ auf einem offenen Interval, so ist jede höhere Ableitung auch 0, da jeder Punkt ein innerer Punkt ist und die Ableitung per Differenzenquotient definiert ist. Dann gilt $f^{(n)} = 0$ auf $[0,1]$ und stimmt daher schon mit einem Polynom überein.

- Sei $E_n := \{x \in H : f^{(n)}(x) = 0\}$, dann gilt wie im ersten Teil, dass eins der E_n eine abgeschlossene Kugel enthalten muss und in ihr eine offene Kugel. Die Begriffe offen und abgeschlossen beziehen sich hierbei auf die Teilraumtopologie von H in $[0,1]$, das heißt, es existiert eine offenes Interval $J \in [0,1]$ mit $J \cap H \subset E_n$. Dann gibt es ein Interval $K \in J \setminus H$ mit Randpunkt in H und $m \in \mathbb{N}$ mit $f^{(m)}(x) = 0 \quad x \in K$.

- Angenommen $m \leq n$, da K offenes Interval ist, ist jede höhere Ableitung auch 0. Angenommen $m > n$. Dann ist für jedes $x \in K \quad f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(y) + \int_y^x f^{(m)}(t)\,dt = 0. \quad (y \in H)$, da $f^{(m-1)}(x) = 0$ in H. Dies kann man für jedes Interval K in J machen, sodass man $f^{(n)} = 0$ in ganz J erhält

- Nach Wahl von $H = [0,1] \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathring{I}_k$ als Komplement solcher Intervalle, enthält J keinen Punkt aus H, wobei andererseits J als Umgebung von Punkten aus H definiert wurden. Das heißt die Annahme, dass H nicht leer ist, war falsch.

Aufgabe 3 (Äquivalenz von Normen)

Seien auf E zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gegeben, die beide E zu einem Banachraum machen. Sei $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$, dann sind beide Normen bereits äquivalent.

Lösung: Betrachte die Abbildung $I : (E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \|\cdot\|_2)$. Diese ist stetig, linear und bijektiv. Die inverse Abbildung ist also stetig, das heißt, es existier $C > 0$ mit

$$\|x\|_1 = \|I^{-1}x\|_1 \leq C\|x\|_2 \qquad (x \in (E, \|\cdot\|_2))$$

und also $\|\cdot\|_2$ stärker als $\|\cdot\|_1$.

Aufgabe 4 (Satz von der stetigen Inversen)

a) Seien X, Y, Z Banachräume und sei $T : X \longrightarrow Y$ linear, $J : Y \longrightarrow Z$ linear, injektiv und stetig. Ferner sei $JT : X \longrightarrow Z$ stetig. Zeigen sie, dass auch T stetig ist.

b) Seien X, X_1, X_2, Y_1, Y_2 Banachräume mit $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ abgeschlossene Untervektorräume und $T_i : X_i \longrightarrow Y_i$ lineare Operatoren mit abgeschlossenen Graphen in $X \times Y_i$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante C gibt mit

$$\|T_2 x\| \leq C(\|T_1 x\| + \|x\|) \qquad (x \in X_1).$$

Lösung:

a) Sei (x_n) Folge in X mit $x_n \longrightarrow x \quad (n \longrightarrow \infty)$ und $Tx_n \to y$. Dann geht JTx_n gegen $JTx \in Im(J)$, da JT stetig ist und $JTx_n \to Jy$, da J stetig ist. Da J injektiv ist, folgt $Tx = y$. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist T stetig.

b) Betrachte folgende Verkettung von Abbildungen:

$$X_1 \xrightarrow{J_1} graph(T_1) \subset X_1 \times Y_1 \xrightarrow{J_2} Y_2, \; x \mapsto (x, T_1 x) \mapsto T_2 x.$$

Dabei seien der Produktraum mit der Produkttopologie (induziert durch die Norm $\| \cdot \|_{X_i \times Y} := (\| \cdot \|_{X_1} + \| \cdot \|_{Y_1})$) ausgestattet. Dann ist J_1 stetig und bijektiv. Die Stetigkeit sieht man unter Verwendung von a) mittels $x \mapsto (x, T_1 x) \mapsto x$. Beachte, dass der Graph von T_1 ein Banachraum ist, und daher der Satz über die inverse Abbildung anwendbar ist. Ferner ist $J_2 \circ J_1$ stetig, da der Graph von T_2 abgeschlossen ist. Wieder mit dem Satz über die inverse Abbildung erhält man dass $J_2 = (J_2 \circ J_1) \circ J_1^{-1}$ stetig ist, es also eine Konstante wie in der Behauptung efordert gibt.