Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 7

Abgabetermin: 13. Dezember 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Nirgends differenzierbare Funktionen)

Betrachten Sie den Banachraum $E := C([0,1],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass es auf $[0,1]$ stetige Funktionen gibt, die an keiner Stelle differenzierbar sind. Zeigen Sie ferner, dass solche Funktionen sogar dicht liegen.
Hinweis: Betrachten Sie die Mengen

$$A_n := \left\{ f \in E : \exists x \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \, \forall h \in (0, \frac{1}{n}) : \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right| \leq n \right\}$$

und verwenden Sie den Satz von Baire.

Aufgabe 2 (Satz von Baire)

Sei $f \in C^\infty([0,1],\mathbb{R})$ und für jedes $x \in [0,1]$ gebe es ein $n(x) \in \mathbb{N}$, sodass für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x) = 0 \;\; (n \geq n(x))$ gilt. Dann ist f ein Polynom auf $[0,1]$. Führen Sie den Beweis anhand der folgenden Schritte durch:

- Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Baire, dass es ein abgeschlossenes Interval I gibt und ein $n \in \mathbb{N}$, sodass
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad (x \in I).$$
Ferner sei I maximal bezüglich dieser Eigenschaft gewählt in dem Sinne, dass aus $f^{(n)}(x) = 0 \; (x \in I')$ mit $I' \supseteq I$ stets folgt $I = I'$. Dann stimmt dort f mit einem Polynom überein

- Falls $I \neq [0,1]$, führen Sie das Gleiche auf $[0,1] \setminus I$ immer wieder durch, sodass sie eine Folge abgeschlossener, disjunkter (warum?) Intervalle $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ erhalten mit $[0,1] \supset \bigcup I_k$. Nun haben Sie abzählbar viele Intervalle, auf denen f jeweis mit einem Polynom überein stimmt.

- Betrachten Sie das Innere $\mathring{I}_k$ bezüglich der Teilraumtopologie von $[0,1]$ in $\mathbb{R}$, also die größte Menge, die Schnitt einer in $\mathbb{R}$ offenen Menge mit $[0,1]$ ist, und welche komplett in I_k liegt. Dazu definieren Sie
$$H := [0,1] \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k.$$
Argumentieren Sie, dass H abgeschlossen in $[0,1]$ ist und das H keine isolierten Punkte hat. Dann kann man jeden Punkt x_0 als Grenzwert einer Folge in $H \setminus \{x_0\}$ darstellen.
Hinweis: Falls H einen isolierten Punkt $x \in H$ hat, so ist x Endpunkt von zwei maximalen Intervallen. Führen Sie dies zum Widerspruch.

- Was können Sie folgern, wenn $H = \emptyset$ ist.

- Nehmen Sie an, H sei nicht leer. Betrachten Sie H als vollständigen metrischen Raum (mit Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ wie oben). Zeigen Sie mittels Satz von Baire, dass es eine offene Kugel U in H gibt und $n \in \mathbb{N}$, mit $f^{(n)}(x) = 0 \quad (x \in U)$ ähnlich wie im ersten Teil. Das heißt per Definition der Teilraumtopologie, es gibt ein offenes Interval $J \subseteq [0,1]$, sodass $f^{(n)}(x) = 0$ $(x \in J \cap H)$. Was folgt für höhere Ableitungen aus der Eigenschaft, dass jeder Punkt von H Häufungspunkt ist? Da H abgeschlossen in $[0,1]$ ist, gibt es Intervalle $K \subset [0,1]$ im Komplement $J \setminus H$. Dort gibt es nach Definition von H ein $m > 0$ mit $f^{(m)}(x) = 0 \quad x \in K$. Zeigen Sie, dass dann $f^{(n)}(x) = 0 \quad (x \in K)$ gilt.

- Folgern Sie aus $f^{(n)}(x) = 0 \quad (x \in J)$, dass J keine Punkte aus H entält und daher H leer sein muss und es daher von Anfang an nur ein Interval I geben konnte, auf dem f mit einem Polynom übereinstimmt.

Aufgabe 3 (Äquivalenz von Normen)

Seien auf E zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gegeben, die beide E zu einem Banachraum machen. Sei $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$, dann sind beide Normen bereits äquivalent.

Aufgabe 4 (Satz von der stetigen Inversen)

a) Seien X, Y, Z Banachräume und sei $T : X \longrightarrow Y$ linear, $J : Y \longrightarrow Z$ linear, injektiv und stetig. Ferner sei $JT : X \longrightarrow Z$ stetig. Zeigen sie, dass auch T stetig ist.

b) Seien X, X_1, X_2, Y_1, Y_2 Banachräume mit $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X$ abgeschlossene Untervektorräume und $T_i : X_i \longrightarrow Y_i$ lineare Operatoren mit abgeschlossenen Graphen in $X \times Y_i$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass es dann eine Konstante C gibt mit

$$\|T_2 x\| \leq C(\|T_1 x\| + \|x\|) \qquad (x \in X_1).$$