Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 8 - Lösungen

Abgabetermin: 20. Dezember 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Punktweise Konvergenz)

Sei E ein Banach-Raum, $(A_n), (B_n)$ Folgen in $L(E)$, sowie $A, B \in L(E)$. Es gelte

$$A_n \longrightarrow A,\ B_n \longrightarrow B \qquad \text{punktweise } (n \longrightarrow \infty).$$

Dann gilt

$$A_nB_n \qquad AB\text{punktweise } (n \to \infty).$$

Lösung: Da $A_n \to A$ punktweise gilt, ist die Menge $\{\|A_n\|, n \in \mathbb{N}\}$ beschränt. Es gibt also $C > 0$ mit $\|A_n\| \leq C \quad (n \in \mathbb{N})$. Dann gilt für beliebiges $x \in E$:

$$\|A_nB_nx - ABx\| \leq \|A_n\|\|B_nx - Bx\| + \|(A_n - A)Bx\| \leq C\|B_nx - Bx\| + \|(A_n - A)\underbrace{Bx}_{\in E}\| \to 0,$$

$(n \longrightarrow 0)$.

Aufgabe 2 (stetige 2π-periodische Funktionen mit divergenter Fourierreihe)

In dieser Aufgabe soll Satz 12.13 benutzt werden, um die Existenz von stetigen 2π-periodischen Funktionen mit divergenter Fourierreihe zu beweisen. Genauer gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ eine solche Funktion, deren Fourierreihe in x_0 divergiert. Betrachten Sie den Banach-Raum (wieso vollständig?) der 2π-periodischen stetigen Funktionen $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Definieren Sie die Operatorfolge

$$S_n : C_{2\pi} \longrightarrow C_{2\pi},\ (S_nf)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikt},$$

wobei

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\, dt$$

ist. Zeigen Sie, dass S_n die Integraldarstellung

$$(S_nf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(t - x)\right)}\, dt$$

hat und zeigen Sie, dass für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Norm (siehe Beispiel zu Satz 4.1) von $\phi_n : C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\phi_n(f) := (S_nf)(x_0)$ gegen unendlich geht $(n \to \infty)$. Folgern Sie das Behauptete.

Lösung:

Zunächst hat man

$$
\begin{aligned}
&(S_n f)(x)\\
&= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikx} = \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} \right) dt\\
&= \int_0^{2\pi} f(t) \left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik(x-t)} - \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} e^{-ik(x-t)} - \frac{1}{2} \right) dt\\
&= \int_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{1 - e^{i(n+1)(x-t)}}{1 - e^{i(x-t)}} - \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{-i(n+1)(x-t)}}{1 - e^{-i(x-t)}} - \frac{1}{2} \right) dt\\
&= \int_0^{2\pi} f(t) \Bigg(\frac{e^{-i(x-t)/2} - e^{i(n+1/2)(x-t)} - 1/2\left(e^{-i(x-t)/2} - e^{i(x-t)/2}\right)}{e^{-i(x-t)/2} - e^{i(x-t)/2}}\\
&\quad + \frac{e^{i(x-t)/2} - e^{-i(n+1/2)(x-t)} - 1/2\left(e^{i(x-t)/2} - e^{-i(x-t)/2}\right)}{e^{i(x-t)/2} - e^{-i(x-t)/2}} \Bigg) dt\\
&= \int_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{-e^{i(n+1/2)(x-t)} + \cos((x-t)/2)}{e^{-i(x-t)/2} - e^{i(x-t)/2}} + \frac{-e^{-i(n+1/2)(x-t)} + \cos((x-t)/2)}{e^{i(x-t)/2} - e^{-i(x-t)/2}} \right) dt\\
&= \int_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} \right) dt
\end{aligned}
$$

Die Norm dieses Integraloperators ist gegeben durch

$$
\sup_{x\in[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} \right| dt.
$$

Für $\alpha \in [\pi/4 + k\pi, 3\pi/4 + k\pi]$ ist $\sin(\alpha) \geq 1/\sqrt{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Mache den Integrationsbereich nun kleiner, sodass der Zähler immer größer oder gleich $1/\sqrt{2}$ ist. Für $t \in [\xi_k, \xi_{k+1}|$ mit $\xi_k = (4j+1)(4n+2)^{-1}\pi + x$ ist das der Fall. Ferner ist $|\sin(x)| \leq |x|$ $(x \in \mathbb{R})$, sodass man abschätzen kann:

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,2\pi]} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} \right| dt\\
\geq &\sup_{x\in[0,2\pi]} \sum_{k=0}^{2n} \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \frac{1/\sqrt{2}}{t/2}\, dt\\
\geq &\frac{1}{\sqrt{2}\pi} \sup_{x\in[0,2\pi]} \sum_{k=0}^{2n} \xi_k^{-1}(\xi_{k+1} - \xi_k) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{4k+3} \longrightarrow \infty \qquad (n \longrightarrow \infty).
\end{aligned}
$$

Die Menge $\{\|\phi_n\|, n \in \mathbb{N}\}$ ist also nicht beschränkt. Daher kann nach Banach Steinhaus ϕ_n nicht punktweise konvergieren. Es gibt also ein $f \in C_{2\pi}$, für das $\phi_n(f)$ divergiert.

Aufgabe 3 (gleichmäßige Beschränktheit)

Seien E, F Banachräume über $\mathbb{C}$ und sei $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ bilinear und stetig in jeder Komponente, das heißt, $B(x, \cdot)$ ist stetig und linear $(x \in X)$, sowie $B(\cdot, y)$ ist stetig und linear $(y \in Y)$. Dann ist B stetig.

Lösung Betrachte die Familie $\mathcal{B} := \{\beta_x : x \in E, \|x\| = 1\} \subset F'$ mit $\beta_x(y) = B(x,y)$. Dann ist $\mathcal{B}$ punktweise beschränkt, das heißt für jedes $y \in F$ gibt es ein α_y mit $\|\beta_x(y)\| \leq \alpha_y$ $(\beta_x \in \mathcal{B})$ Das folgt, weil $B(\cdot, y)$ stetig ist $(y \in F)$. Dann ist $\{\|\beta_x\| : x \in E, \|x\| = 1\}$ beschränkt. Es gibt daher $C > 0$ mit

$$\sup_{x \in E, \|x\|=1} \|\beta_x\| = \sup_{x \in E, \|x\|=1} \sup_{y \in F, \|y\|=1} |B(x,y)| \leq C.$$

Mit ähnlichem Beweis wie in 4.1 erhält man aus dieser Beschränktheit die Stetigkeit von B.

Aufgabe 4 (Nochmal der Ableitungsoperator)

Zeigen Sie die Abgeschlossenheit oder Nichtabgeschlossenheit des Ableitungsoperators

$$\frac{d}{dx} : D \longrightarrow F.$$

D sei dabei ein Untervektorraum von E und es seien E, F, D die folgenden Räume

a) $X = Y = L^2([-1,1])$, $D = C^1([-1,1])$

b) $X = Y = L^2([-1,1])$, $D := \{x \in L^2([-1,1]),\ x$ ist absolutstetig und $x' \in L^2([-1,1])\}$. Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass absolutstetige Funktionen fast überall differenzierbar sind und für sie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt.

Lösung

a) Betrachte $x_n(t) = \sqrt{t^2 + 1/n}$, $x(t) = |t|$, $y(t) = 1$, für $t > 0$, 0 für $t = 0$ und -1 für $t < 0$. Dann gilt $x_n \to x$ in L^2 und $x_n' \to y$ in L^2 aber $(x,y) \notin \mathrm{Graph}\,(\frac{d}{dx})$.

b) Sei $x_n \in D$, sodass $(x_n, \frac{d}{dx} x_n)$ in $L^2 \times L^2$ konvergiert. gegen (x,y). Wir zeigen, dass dann x_n gleichmäßig gegen x konvergiert. Sei $t \in [-1,1]$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x_m(t)| &\leq |x_n(0) - x_m(0)| + \sqrt{2} \left(\int_0^t |x_n'(s) - x_m'(s)|^2 \, ds \right)^{1/2} \\ &\leq |x_n(0) - x_m(0)| + \|x_n' - x_m'\|_{L^2([-1,1])} \qquad (m, n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Ferner kann man den ersten Summanden der rechten Seite auch abschätzen durch

$$|x_n(0) - x_m(0)| = \left| \int_0^1 (|x_n(s) - x_m(s)|(s-1))' \, ds \right|$$
$$\leq \left| \int_0^1 |x_n'(s) - x_m'(s)|(s-1) \right| ds + \int_0^1 |x_n(s) - x_m(s)| \, ds$$
$$\leq \|x_n - x_m\|_{L^2([-1,1])} + \|x_n' - x_m'\|_{L^2([-1,1])}.$$

Daher konvergiert $|x_n(t) - x_m(t)|$ gleichmäßig in t gegen 0. Es sei x' der L^2-Grenzwert von x_n', lasse m gegen unendlich gehen, sodass man erhält

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \|x_n(t) - x(t)\|_{L^2([-1,1])} + 2\, \|x_n' - x'\|_{L^2([-1,1])} \qquad (t \in [-1,1]).$$

y ist L^2-Funktion also insbesondere in $L^1([-1,1])$. Daher ist $x(t) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n(0) + \int_0^t y(s) ds$ absolut stetig als Stammfunktion einer L^1- Funktion. Daher $x \in D.$ Da x_n gleichmäßig gegen x konvergiert, gilt

$$\int_0^t x'(s) \, ds = \int_0^t y(s) \, ds \qquad (t \in [-1,1]),$$

und damit $x'(s) = y(s)$ für fast alle $s \in [-1,1]$. Daher sind $x(s)$ und $y(s)$ im L^2-Sinne gleich, also y im Bild von $\frac{d}{dx}$.