**Karlsruher Institut für Technologie**
**Institut für Analysis**
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

# Funktionalanalysis Übungsblatt 8

Abgabetermin: 20. Dezember 2013, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis, Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

## Aufgabe 1 (Punktweise Konvergenz)

Sei $E$ ein Banach-Raum, $(A_n), (B_n)$ Folgen in $L(E)$, sowie $A, B \in L(E)$. Es gelte

$$A_n \longrightarrow A,\ B_n \longrightarrow B \qquad \text{punktweise } (n \longrightarrow \infty).$$

Dann gilt

$$A_n B_n \longrightarrow AB \qquad \text{punktweise } (n \longrightarrow \infty).$$

## Aufgabe 2 (stetige $2\pi$-periodische Funktionen mit divergenter Fourierreihe)

In dieser Aufgabe soll Satz 12.13 benutzt werden, um die Existenz von stetigen $2\pi$-periodischen Funktionen mit divergenter Fourierreihe zu beweisen. Genauer gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ eine solche Funktion, deren Fourierreihe in $x_0$ divergiert. Betrachten Sie den Banach-Raum (wieso vollständig?) der $2\pi$-periodischen stetigen Funktionen $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Definieren Sie die Operatorfolge

$$S_n : C_{2\pi} \longrightarrow C_{2\pi},\ (S_n f)(t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikt},$$

wobei

$$\widehat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

ist. Zeigen Sie, dass $S_n$ die Integraldarstellung

$$(S_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(t - x)\right)}\, dt$$

hat und zeigen Sie, dass für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Norm (siehe Beispiel zu Satz 4.1) von $\phi_n : C_{2\pi} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\phi_n(f) := (S_n f)(x_0)$ gegen unendlich geht $(n \to \infty)$. Folgern Sie das Behauptete.

## Aufgabe 3 (gleichmäßige Beschränktheit)

Seien $E, F$ Banachräume über $\mathbb{C}$ und sei $B : E \times F \longrightarrow \mathbb{C}$ bilinear und stetig in jeder Komponente, das heißt, $B(x, \cdot)$ ist stetig und linear $(x \in X)$, sowie $B(\cdot, y)$ ist stetig und linear $(y \in Y)$. Dann ist $B$ stetig.

**Aufgabe 4 (Nochmal der Ableitungsoperator)**

Zeigen Sie die Abgeschlossenheit oder Nichtabgeschlossenheit des Ableitungsoperators

$$\frac{d}{dx} : D \longrightarrow F.$$

$D$ sei dabei ein Untervektorraum von $E$ und es seien $E, F, D$ die folgenden Räume

a) $X = Y = L^2([-1,1])$ , $D = C^1([-1,1])$

b) $X = Y = L^2([-1,1])$ , $D := \{x \in L^2([-1,1]),\ x$ ist absolutstetig und $x' \in L^2([-1,1])\}$ . Sie dürfen hier ohne Beweis verwenden, dass absolutstetige Funktionen fast überall differenzierbar sind und für sie der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt.