Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 9 - Lösungen

Abgabetermin: 10. Januar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis,
Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Duale Operatoren)

Berechnen Sie die dualen Abbildungen der folgenden Operatoren auf reellen Folgenräumen:

a)
$$T : l^1 \longrightarrow l^1,\ (Ta_n)_{n\geq 1} = (a_{n+1})_{n\geq 1}$$

b)
$$S : l^{12} \longrightarrow l^3,\ (Tb_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$$

Lösung:

Es ist $(l^1)' = l^\infty$. Sei also $(b_n) \in l^\infty$, dann gilt:

$$\langle T'(b_n), (a_n)\rangle = \langle (b_n), T(a_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n a_{n+1} = 0 + \sum_{n\geq 2} b_{n-1} a_n \qquad ((a_n) \in l^1)$$
$$\Rightarrow \qquad T'(b_n) = (0, b_1, b_2, \cdots).$$

Die Dualräume von l^p sind nach Kapitel 13 durch die Hölderkonjugierten l^q-Räume gegeben. Daher ist

$$S' : l^{\frac{12}{11}} \longrightarrow l^{\frac{3}{2}}$$

zu definieren. Es gilt für beliebiges $(a_n) \in l^{12}$ und $(b_n) \in l^{\frac{3}{2}}$:

$$\langle T'(b_n), (a_n)\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{\sqrt{n}} a_n$$

Daher ist $T'(b_n) = \frac{b_n}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 2 (Konvexe Mengen)

Sei $M \subseteq E$ konvexe Teilmenge eines Banachraums. Sei $A \in L(E,F)$, zeigen Sie, dass $A(M), \overline{M}$ und $\overline{A(M)}$ konvex sind.

Lösung:

Seien $y_1, y_2 \in A(M)$ es gibt also $x_1, x_2 \in M$ mit $A(x_i) = y_i$, $i = 1, 2$. Dann gilt für $\lambda \in [0,1]$ mittels Linearität von A:

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

und also $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in A(M)$.
Seien $x, y \in \overline{M}$. Es gibt also Folgen $(x_n), (y_n)$ in M mit $x_n \to x$, $y_n \to y$ $(n \to \infty)$. Dann gilt für $\lambda \in [0,1]$:

$$\|(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) - (\lambda x + (1-\lambda)y)\| \geq \lambda\|x_n - x\| + (1-\lambda)\|y_n - y\| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

. Da $(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \in M$, $(n \in \mathbb{N})$ weil M konvex ist, folgt $(\lambda x + (1-\lambda)y) \in \overline{M}$.
$\overline{A(M)}$ ist konvex als Konsequenz der eben betrachteten Fälle.

Aufgabe 3 (Projektionen auf l^∞)

Sei l^∞ isometrisch isomorph zu einem Unterraum U eines normierten Raumens E, dann gibt es eine stetige Projektion $P : E \longrightarrow U$ mit $\|P\| = 1$.
Hinweis: Betrachte $\phi_n \in (l^\infty)'$ mit $\phi_n((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) = a_n$ und benutzen Sie Hahn-Banach.

Lösung:

Sei $T : U \to l^\infty$ ein isometrischer Isomorphismus. Betrachte $\phi_n : U \to \mathbb{R}, u \mapsto (Tu)_n$. Es gilt:

$$\|\phi_n(u)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Tu)_n| = \|Tu\|_\infty = \|u\|_E.$$

Daher $\|\phi_n\| \leq 1$ und ϕ_n kann für jedes $n \in \mathbb{N}$ zu einem stetigen Funktional $f_n \in E'$ fortgesetzt werden mit $\|f_n\| = \|\phi_n\|$. Definiere dann $P : E \to U,\ x \mapsto T^{-1}(f_n(u))_{n\in\mathbb{N}}$. Dies ist ok, da

$$\|f_n(u)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(u)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|\|u\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\phi_n\|\|u\| \leq \|u\|$$

, und damit T^{-1} auch definiert ist. Die gewünschten Eigenschaften folgen sofort.

Aufgabe 4 (Komplementierbarkeit)

Zeigen Sie, dass c_0 in l^∞ nicht komplementierbar ist. Gehen Sie dabei zum Beispiel anhand folgender Schritte vor.

a) Ein metrischer Raum E ist genau dann isometrisch zu einer Teilmenge von l^∞, wenn es eine abzählbare Menge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in E' gibt mit $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(x)|$.
Hinweis: Betrachten Sie $T : E \longrightarrow l^\infty, Tx = \{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$

b) Jeder komplementierbare Unterraum von l^∞ ist abzählbarer Durchschnitt von Nullräumen von stetigen linearen Funktionalen.
Hinweis: Verwenden Sie die ϕ_n aus Aufgabe 3.

c) Nun sollen Sie zeigen, dass c_0 nicht als einen in b) dargestellten Kern beschreibbar ist. In Blatt 3 A3 hatten Sie überabzählbar viele unendliche Teilmengen N_α von $\mathbb{N}$ konstruiert, die paarweise endlichen Schnitt hatten. Betrachten Sie charakteristische Funktionen auf diesen Mengen, und dazu Folgen $(\chi_{N_\alpha}(n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Diese sind nicht in c_0. Zeigen sie, dass für alle $\phi \in (l^\infty)'$ mit $c_0 \subseteq \ker(\phi)$ die Anzahl der α mit $\phi(\chi_{N_\alpha}) \neq 0$ abzählbar ist, indem Sie zeigen, dass $A_n := \{\alpha : |\phi(\chi_{N_\alpha})| \geq 1/n\}$ endlich ist.

Hinweis: Betrachten Sie $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in A_n$. Definieren Sie $x = \sum_{j=1}^{k} sign(\phi(\chi_{N_{\alpha_j}}))\chi_{N_{\alpha_j}}$ Dann ist $\phi(x) \geq k/n$. Zeigen Sie, dass Sie endliche viele Glieder von $y \in N_\alpha$ ändern dürfen, ohne den Wert von $\phi(x)$ zu verändern. Konstruieren Sie durch Änderung endlich vieler Glieder von x ein y mit $\|y\| = 1$. Schätzen sie mit $\phi(x) = \phi(y)$ die Anzahl k nach oben ab.

d) Folgern Sie, dass, falls $c_0 \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$ ist, dann gibt es ein α mit $\chi_\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Daher ist $c_0 \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Fügen Sie a) bis d) zusammen und erhalten Sie die Behauptung.

Lösung:

$(\Rightarrow)$ Sei E isometrisch zu einer Teilmenge von l^∞, Es gibt also eine Abbildung $T : E \to U \subset l^\infty$. mit $\|x\|_E = \|Tx\|_\infty$. Dann $\phi_n(x) := (Tx)_n$ eine solche Menge.
$(\Leftarrow)$. Angenommen es gibt so eine Menge $\{\phi_n\}$, betrachte $Tx = (\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Dann ist $T(E) \subseteq l^\infty$, denn $\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(x)| = \|Tx\|_\infty$.
Sei U komplementierbarer Unterraum von l^∞. Sei P die Projektion auf U. Dann folgt

$$U \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \phi_n \circ (1 - P)$$

.
Wir folgen den Anweisungen und zeigen, dass $A_n := \{\alpha : |\phi(\chi_{N_\alpha})| \geq 1/n\}$ endlich ist. Seien $\alpha_1, \cdots \alpha_k \in A_n$. Da $c_0 \in \ker(\phi)$, gilt für alle $x \in c_0, y \in l^\infty$: $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y) = \phi(y)$. Daher kann man endlich viele Glieder ändern, ohne den Wert von ϕ zu verändern. Definiere $N_{\beta_j} := N_{\alpha_j} \setminus \bigcup_{m\neq j} N_{\alpha_m}$ Da die Mengen N_α paarweise nur endlichen Schnitt haben, fallen bei der Bildung von N_{β_j} nur endlich viele Elemente weg im Gegensatz zu N_{α_j}. Daher gilt: $\phi(\chi_{N_{\alpha_j}}) = \phi(\chi_{N_{\beta_j}})$. Dann sind ferner N_{β_j} disjunkt und daher $\| \sum_{j=1}^{k} \chi_{N_{\beta_j}} \|_\infty = 1$. Es folgt mittels Hinweis:

$$\|\phi\| \geq \|\phi(\sum_{j=1}^{k} \chi_{N_{\beta_j}} \cdot sign(\phi(\chi_{N_{\beta_j}}))\| = \|\phi(x)\| \geq \frac{k}{n}$$

Daher ist $k \leq \|\phi\| \cdot n$ nach oben beschränkt.
Sei nun ϕ_n gegeben, sodass $c_0 \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens abzählbar viele α mit $\phi_n(\chi_{N_\alpha}) \neq 0$. Das heißt, es gibt höchstens abzählbar viele α mit χ_{N_α} im Komplement von $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Da es aber überabzählbar viele verschiedene N_α gibt, gibt es auch ein α mit $N_\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Das heißt $c_0 \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Daher ist c_0 nicht komplementierbar.