Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
M. Sc. Peter Rupp

Funktionalanalysis Übungsblatt 9

Abgabetermin: 10. Januar 2014, 10:00Uhr bei den Zettelkästen im Institut für Analysis,
Kaiserstr. 89 Gebäudeteil 3B

Aufgabe 1 (Duale Operatoren)

Berechnen Sie die dualen Abbildungen der folgenden Operatoren auf reellen Folgenräumen:

a)
$$T : l^1 \longrightarrow l^1,\ (Ta_n)_{n\geq 1} = (a_{n+1})_{n\geq 1}$$

b)
$$S : l^{12} \longrightarrow l^3,\ (Tb_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$$

Aufgabe 2 (Konvexe Mengen)

Sei $M \subseteq E$ konvexe Teilmenge eines Banachraums. Sei $A \in L(E,F)$, zeigen Sie, dass $A(M), \overline{M}$ und $\overline{A(M)}$ konvex sind.

Aufgabe 3 (Projektionen auf l^∞)

Sei l^∞ isometrisch isomorph zu einem Unterraum U eines normierten Raumens E, dann gibt es eine stetige Projektion $P : E \longrightarrow U$ mit $\|P\| = 1$.
Hinweis: Betrachte $\phi_n \in (l^\infty)'$ mit $\phi_n((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) = a_n$ und benutzen Sie Hahn-Banach.

Aufgabe 4 (Komplementierbarkeit)

Zeigen Sie, dass c_0 in l^∞ nicht komplementierbar ist. Gehen Sie dabei zum Beispiel anhand folgender Schritte vor.

a) Ein metrischer Raum E ist genau dann isometrisch zu einer Teilmenge von l^∞, wenn es eine abzählbare Menge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in E' gibt mit $\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(x)|$.
   Hinweis: Betrachten Sie $T : X \longrightarrow l^\infty,\ Tx = \{\phi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$

b) Jeder komplementierbare Unterraum von l^∞ ist abzählbarer Durchschnitt von Nullräumen von stetigen linearen Funktionalen.
   Hinweis: Verwenden Sie die ϕ_n aus Aufgabe 3.

c) Nun sollen Sie zeigen, dass c_0 nicht als einen in b) dargestellten Kern beschreibbar ist. In Blatt 3 A3 hatten Sie überabzählbar viele unendliche Teilmengen N_α von $\mathbb{N}$ konstruiert, die paarweise endlichen Schnitt hatten. Betrachten Sie charakteristische Funktionen auf diesen Mengen, und dazu Folgen $(\chi_{N_\alpha}(n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. Diese sind nicht in c_0. Zeigen sie, dass für alle $\phi \in (l^\infty)'$ mit $c_0 \subseteq \ker(\phi)$ die Anzahl der α mit $\phi(\chi_{N_\alpha}) \neq 0$ abzählbar ist, indem Sie zeigen, dass $A_n := \{\alpha : |\phi(\chi_{N_\alpha})| \geq 1/n\}$ endlich ist.

Hinweis: Betrachten Sie $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in A_n$. Definieren Sie $x = \sum_{j=1}^{k} sign(\phi(\chi_{N_{\alpha_j}}))\chi_{N_{\alpha_j}}$ Dann ist $\phi(x) \geq k/n$. Zeigen Sie, dass Sie endliche viele Glieder von $y \in N_\alpha$ ändern dürfen, ohne den Wert von $\phi(x)$ zu verändern. Konstruieren Sie durch Änderung endlich vieler Glieder von x ein y mit $\|y\| = 1$. Schätzen sie mit $f(x) = f(y)$ die Anzahl k nach oben ab.

d) Folgern Sie, dass, falls $c_0 \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$ ist, dann gibt es ein α mit $\chi_\alpha \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Daher ist $c_0 \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(\phi_n)$. Fügen Sie a) bis d) zusammen und erhalten Sie die Behauptung.