UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Thomas Gauss

SS 2009
19.5.2009

5. Übungsblatt

Grundbegriffe der Mathematik
für Ingenieur-Pädagoginnen und -Pädagogen

Abgabe: bis Donnerstag, den 28.5.2009, 9.00 Uhr

Aufgabe 21

In $M = \{1, 2, 3, 4\}$ betrachte man die Relationen

$$R_1 = \{(2, 3), (3, 4), (2, 4)\},$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\},$$

$$R_3 = \{(1, 4), (2, 3), (4, 1), (3, 2)\},$$

$$R_4 = R_2 \cup R_3 \ .$$

Welche dieser Relationen sind reflexiv, symmetrisch bzw. transitiv; welche sind Äquivalenzrelationen in M?

Aufgabe 22

Wie viele Äquivalenzrelationen gibt es in der Menge $\{1, 2, 3\}$?

Aufgabe 23 (K) (4 Punkte)

Es sei $\sim$ eine Relation in einer Menge M. Man beweise:

a) $\sim$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation in M, wenn gilt:

(i) $x \sim x$ $(x \in M)$,

(ii) aus $x \sim y, z \sim y$ folgt $x \sim z$ $(x, y, z \in M)$.

b) $\sim$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation in M, wenn gilt:

(i) Zu jedem $x \in M$ gibt es ein $y \in M$ mit $x \sim y$,

(ii) aus $x \sim y, z \sim y$ folgt $x \sim z$ $(x, y, z \in M)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 24

Es seien A, B Mengen. R sei eine Äquivalenzrelation in A, und S eine Äquivalenzrelation in B. Für $(a, b), (c, d) \in A \times B$ setze man $(a, b) \sim (c, d)$, wenn aRc und bSd gilt. Man zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation in $A \times B$ ist.

Aufgabe 25 (K) (4 Punkte)

Es sei M eine Menge und $(M_i)_{i \in I}$ ein System nicht-leerer Teilmengen M_i von M mit den Eigenschaften

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i,$$
$$M_i \cap M_j = \emptyset \text{ für } i, j \in I \text{ mit } i \neq j.$$

Für $x, y \in M$ werde $x \sim y$ gesetzt, falls es ein $i \in I$ gibt mit $x \in M_i$ und $y \in M_i$ gibt. Man beweise:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation in M.

b) Die zugehörigen Äquivalenzklassen sind genau die Mengen M_i $(i \in I)$.