UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Thomas Gauss

SS 2009
28.5.2009

6. Übungsblatt

Grundbegriffe der Mathematik für Ingenieur-Pädagoginnen und -Pädagogen

Abgabe: bis **Dienstag, den 9.6.2009, 9.00 Uhr**

Aufgabe 26

Man bestimme die folgenden Mengen:

a) $\displaystyle\bigcup_{x\in\mathbb{R}}]1, 1+x[,$ **b)** $\displaystyle\bigcap_{x\in(0,\infty)}]-x, x[,$

c) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{-n, n\},$ **d)** $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} [n-1, n+1].$

Aufgabe 27

Wie viele Halbordnungen und wie viele lineare Ordnungen gibt es in der Menge $\{1, 2, 3\}$?

Aufgabe 28

In $\mathbb{Z}$ gebe man eine Wohlordnung an und außerdem eine Halbordnung, die keine lineare Ordnung ist.

Aufgabe 29 (K) (4 Punkte)

a) Es sei $\leq$ eine Halbordnung in einer Menge M, und für $x, y \in M$ werde $x < y$ gesetzt, falls $x \leq y$ und $x \neq y$ gilt. Man beweise:

(i) Für kein $x \in M$ ist $x < x$.

(ii) Aus $x < y,\ y < z$ folgt $x < z$ $(x, y, z \in M)$.

(iii) Im Falle einer linearen Ordnung $\leq$ tritt für $x, y \in M$ genau einer der folgenden Fälle ein: $x < y,\ x = y,\ y < x$.

b) Es sei $<$ eine Relation in einer Menge M mit den Eigenschaften (i) und (ii). Für $x, y \in M$ werde $x \leq y$ gesetzt, falls $x < y$ oder $x = y$ gilt. Man zeige: $\leq$ ist eine Halbordnung in M.

— bitte wenden —

Aufgabe 30

Es sei $\leq$ eine Halbordnung in einer Menge M und für $x \in M$ werde $M_x = \{z \mid z \in M,\ z \leq x\}$ gesetzt. Man beweise:

a) Für $x, y \in M$ gilt $x \leq y$ genau dann, wenn $M_x \subseteq M_y$ ist.

b) Die durch $f(x) = M_x$ $(x \in M)$ definierte Funktion $f : M \to \mathcal{P}(M)$ ist injektiv.

Aufgabe 31

a) Man zeige durch vollständige Induktion: Jede nichtleere, endliche, linear geordnete Menge besitzt ein kleinstes Element.

b) Man beweise: Jede endliche, linear geordnete Menge ist wohlgeordnet.

Aufgabe 32 (K) (4 Punkte)

Es sei $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ eine monoton wachsende Funktion, d.h. es gelte

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y) \qquad (x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}).$$

Man beweise: Es gibt mindestens ein $x_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.
Anleitung: Vollständige Induktion über $n = 1, 2, 3, \ldots$.