

7. Übungsblatt

Grundbegriffe der Mathematik für Ingenieur-Pädagoginnen und -Pädagogen

Abgabe: bis Donnerstag, den 18.6.2009, 9.00 Uhr

Aufgabe 33

- Wieviel innere Verknüpfungen gibt es auf einer Menge mit n Elementen ($n = 0, 1, 2, \dots$)? Begründen Sie Ihre Antwort!
- Für welche n ist diese Anzahl kleiner als eine Milliarde? Begründen Sie auch hier Ihre Antwort!

Aufgabe 34 (K) (4 Punkte)

Sind R, S Relationen, so werde gesetzt:

$$R^{(-1)} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\},$$

$$R \diamond S = \{(x, z) \mid \text{es gibt ein } y \text{ mit } (x, y) \in R \text{ und } (y, z) \in S\}.$$

Man beweise für Relationen R, S, T die Regeln:

$$(R \diamond S) \diamond T = R \diamond (S \diamond T), \quad (R \diamond S)^{(-1)} = S^{(-1)} \diamond R^{(-1)}.$$

Aufgabe 35

In Fortsetzung von Aufgabe 34 zeige man für Funktionen f und g :

- $f \diamond g = g \circ f$.
- $f^{(-1)}$ ist genau dann eine Funktion, wenn f injektiv ist. In diesem Fall gilt:
 $f^{(-1)} = f^{-1}$.
- Für injektive f, g gilt $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (vgl. Aufgabe 7).

Aufgabe 36 (K) (4 Punkte)

Es sei $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Man beweise: Durch die Festsetzung

$$(a, b) \circ (c, d) = (a + c, (-1)^c b + d) \quad ((a, b), (c, d) \in G)$$

wird G zu einer Gruppe. Ist G abelsch?

Aufgabe 37

Es sei M eine Menge und $G = \{f \mid f : M \rightarrow M \text{ bijektiv}\}$. Man zeige:

- a) G ist bezüglich der Verkettung von Funktionen eine Gruppe.
- b) G ist genau dann abelsch, wenn $|M| \leq 2$ ist.