UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Thomas Gauss

SS 2009
18.6.2009

8. Übungsblatt

Grundbegriffe der Mathematik
für Ingenieur-Pädagoginnen und -Pädagogen

Abgabe: bis Donnerstag, den 25.6.2009, 9.00 Uhr

Aufgabe 38

Es sei G die Gruppe der Deckabbildungen eines Quadrats d.h. die Menge der Spiegelungen und Drehungen, die das Quadrat in sich selbst überführen, zusammen mit der Hintereinanderausführung.

a) Wieviel Elemente besitzt G?

b) Man gebe eine Verknüpfungstafel für G an.

c) Ist G abelsch?

Aufgabe 39

Man betrachte die Menge $\mathbb{C} := \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$. Auf $\mathbb{C}$ werde eine innere Verknüpfung $+$ durch

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad ((x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{C})$$

und eine innere Verknüpfung $\cdot$ durch

$$(x_1,y_1) \cdot (x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \qquad ((x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{C}$$

definiert. Man beweise:

a) $\mathbb{C}$ ist ein Körper.

b) Durch $f(x) = (x,0)$ für $x \in \mathbb{R}$ wird eine injektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert mit den Eigenschaften

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad \text{und} \qquad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad \text{für alle } x,y \in \mathbb{R}.$$

(f ist eine *„Einbettung“* des Körpers $\mathbb{R}$ in den Körper $\mathbb{C}$.)

c) Es gibt $(x,y) \in \mathbb{C}$ mit $(x,y) \cdot (x,y) = (-1,0)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 40 (K) (4 Punkte)

Es sei M eine Menge. Für $A, B \subseteq M$ werde die *symmetrische Differenz* $A \triangle B$ definiert durch

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Man zeige, dass die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ bezüglich der Verknüpfung $\triangle$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 41 (K) (4 Punkte)

Es sei K ein geordneter Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1.
Man zeige für alle $a, b, c \in K$:

a) Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.

b) Aus $a < b$ und $c < 0$ folgt $bc < ac$.

c) Aus $a \neq 0$ folgt $a^2 > 0$. (Dabei bedeutet: $a^2 = a \cdot a$.)

d) Es gilt $-1 < 0 < 1$.

e) Aus $0 < a < b$ folgt $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$.

f) Aus $0 < a < b$ folgt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 1 + 1$.

Aufgabe 42

Man beweise, dass ein geordneter Körper unendlich viele Elemente hat.