UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Gerd Herzog
Dipl.-Math. Thomas Gauss

SS 2009
25.6.2009

9. Übungsblatt

Grundbegriffe der Mathematik
für Ingenieur-Pädagoginnen und -Pädagogen

Abgabe: bis Donnerstag, den 2.7.2009, 9.00 Uhr

Aufgabe 43

Sei F die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Weiter seien $+$ und $\cdot$ die übliche Addition bzw. Multiplikation, d.h. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ für alle $f, g \in F$ und $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: F ist ein kommutativer Ring mit Einselement.

b) Ist F ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 44

Zeigen Sie, daß für jedes $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ das Distributivgesetz für $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{Z}_q$ gilt.

Aufgabe 45 (K) (4 Punkte)

Geben Sie jeweils die Verknüpfungstafel für die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in $\mathbb{Z}_6$ an.

Aufgabe 46

a) Wie üblich definieren wir die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$. Zeigen Sie $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$.
(Hinweis: Weisen Sie das Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks nach und führen Sie damit eine vollständige Induktion über n durch.)

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 47 (K) (4 Punkte)

Hinweis: Sie dürfen hier die Aussagen aus Aufgabe 46 ohne Beweis verwenden.
Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p gilt:

a) $p|\binom{p}{k}$ für alle $k \in \{1, \ldots, p-1\}$.

b) $([a]+[b])^p = [a]^p + [b]^p$ in $\mathbb{Z}_p$ für alle $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$.

c) $[a]^p = [a]$ in $\mathbb{Z}_p$ für alle $[a] \in \mathbb{Z}_p$.