Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S.Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Aussage „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad und der Straßenbahn“ entsteht aus den beiden Teilaussagen

A : „Alle Karlsruher fahren mit dem Fahrrad.“
B : „Alle Karlsruher fahren mit der Straßenbahn.“

mittels der logischen Verknüpfung $\wedge$ (und). Negation ergibt

$$\neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \vee (\neg B),$$

also lautet die Negation obiger Aussage

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad fährt,
oder es gibt einen Karlsruher, der nicht mit der Straßenbahn fährt“

bzw. kurz

„Es gibt einen Karlsruher, der nicht mit dem Fahrrad oder nicht mit der Straßenbahn fährt“.

b) Betrachten wir die drei Aussagen

A : „Im Kino läuft Herr der Ringe“,
B : „Im Kino läuft James Bond“,
C : „Ich gehe ins Kino“,

dann entspricht die Aussage „Ich gehe immer ins Kino, wenn Herr der Ringe oder James Bond laufen“: $(A \vee B) \Rightarrow C$. Wegen $(E \Rightarrow C) \;\Leftrightarrow\; (\neg E \vee C)$ ist

$$\neg\big(\underbrace{(A \vee B)}_{=E} \Rightarrow C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \neg\big(\neg\underbrace{(A \vee B)}_{=E} \vee C\big) \quad\Leftrightarrow\quad \big((A \vee B) \wedge \neg C\big).$$

In Worten: „Im Kino lief ein Herr der Ringe- oder ein James Bond-Film, und ich bin (dennoch) nicht ins Kino gegangen“.

c) Es sei A die Aussage „Morgen ist schönes Wetter“ und B die Aussage „Alle Studierenden gehen in den Schlossgarten“, dann müssen wir $A \Rightarrow B$ verneinen. Es gilt:

$$\neg(A \Rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; \neg\big((\neg A) \vee B\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\neg(\neg A) \wedge (\neg B)\big) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B).$$

Somit lautet die Negation des Satzes: „Morgen ist schönes Wetter, und es gibt einen Studierenden, der nicht in den Schlossgarten geht“.

d) Wir wollen $\exists x$ mit $A(x)$: $B(x)$ negieren, wobei die Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ durch

$A(x)$: „x ist ein Mensch.“
$B(x)$: „Mathematik macht x keinen Spaß.“

gegeben sind. Wegen $\neg\big(\exists x \text{ mit } A(x)\colon B(x)\big) \;\Leftrightarrow\; \big(\forall x \text{ mit } A(x)\colon \neg B(x)\big)$ ist die Negation der ursprünglichen Aussage: „Allen Menschen macht Mathematik Spaß“.

Aufgabe 2

Offenbar gilt: Wenn wir wissen, dass Peter kein Kind hat, wissen wir insbesondere, dass er keine Tochter hat. Also ist die Aussage $K \Rightarrow T$ stets wahr.
Betrachten wir nun $T \Rightarrow K$. Nach Definition von $\Rightarrow$ ist diese Aussage wahr, falls T falsch oder K wahr ist. Falschheit von T bedeutet „Peter hat eine Tochter". Die Aussage $T \Rightarrow K$ ist also wahr, falls Peter eine Tochter oder aber gar keine Kinder hat; sonst ist sie falsch.

Aufgabe 3

a) Die Menge all derer, die in Karlsruhe im ersten Hochschulsemester sind und Physik studieren, lässt sich ausdrücken durch

$$\{x : x \in S_1 \wedge x \in P\} = S_1 \cap P.$$

b) Die Menge aller Karlsruher Studierenden, die im ersten oder dritten Hochschulsemester sind, aber nicht Elektrotechnik studieren, ist gleich

$$\{x : (x \in S_1 \vee x \in S_3) \wedge x \notin E\} = \{x : x \in S_1 \cup S_3 \wedge x \notin E\} = (S_1 \cup S_3) \setminus E.$$

c) Die Menge aller Studierenden in Karlsruhe entspricht

$$\{x : x \in S_1 \vee x \in S_2 \vee x \in S_3 \vee x \in S_4 \vee \ldots\} = \{x : \exists j \in \mathbb{N} : x \in S_j\} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} S_j.$$

Aufgabe 4

Gegeben seien eine Menge M sowie Teilmengen M_1, M_2, M_3 von M.

a) Um die Äquivalenz $M_1 \subset M_2 \;\Leftrightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ zu zeigen, weisen wir die Gültigkeit der Implikationen $M_1 \subset M_2 \;\Rightarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ und $M_1 \subset M_2 \;\Leftarrow\; M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ nach.

„$\Rightarrow$": Es gelte $M_1 \subset M_2$, sei also jedes Element von M_1 auch in M_2 enthalten. Wir müssen nun zeigen: $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ (bzw. in Worten: Jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, liegt auch nicht in M_1.)
Jedes Element der Menge $M \setminus M_2$ ist nicht in M_2 und damit erst recht nicht in M_1; folglich liegt es in $M \setminus M_1$. Also gilt $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$.

„$\Leftarrow$": Es gelte $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$. Zu zeigen ist $M_1 \subset M_2$.
Nach der Voraussetzung $M \setminus M_2 \subset M \setminus M_1$ liegt jedes Element von M, das nicht in M_2 liegt, auch nicht in M_1. Dann ist notwendigerweise jedes Element von M_1 auch in M_2, da es ja sonst nicht in M_1 liegen würde. Also ist $M_1 \subset M_2$.

b) Es gelte $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$. Um $M_1 \subset M_3$ zu zeigen, müssen wir begründen, warum jedes Element aus M_1 auch in M_3 liegt. Sei hierzu $x \in M_1$ beliebig. Wegen $M_1 \subset M_2$ liegt x auch in M_2 und aufgrund von $M_2 \subset M_3$ ist x auch in M_3 enthalten.

Da $x \in M_1$ beliebig war, haben wir eingesehen, dass jedes Element aus M_1 ebenfalls in M_3 liegt, d.h. $M_1 \subset M_3$.

c) Die Äquivalenz der drei Aussagen i), ii), iii) erhalten wir am geschicktesten aus der Implikationskette „i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)".

„i) $\Rightarrow$ ii)": Es gelte $M_1 \subset M_2$. Um nun die Gleichheit der beiden Mengen $M_1 \cap M_2$ und M_1 zu zeigen, brauchen wir nur die eine Inklusion $M_1 \subset M_1 \cap M_2$ einzusehen (die umgekehrte Inklusion gilt ohnehin). Sei dazu $x \in M_1$. Wegen $M_1 \subset M_2$ ist auch $x \in M_2$. Dann ist aber x sowohl in M_1 als auch in M_2, also in $M_1 \cap M_2$.

„ii) $\Rightarrow$ iii)": Hier müssen wir unter der Voraussetzung $M_1 \cap M_2 = M_1$ nur die Inklusion $M_1 \cup M_2 \subset M_2$ nachweisen. Sei also $x \in M_1 \cup M_2$. Ist $x \in M_2$, so ist nichts zu zeigen. Ist $x \in M_1 = M_1 \cap M_2$, so ist $x \in M_2$, was zu zeigen war.

„iii) $\Rightarrow$ i)": Sei hierzu $x \in M_1$. Dann ist jedenfalls $x \in M_1 \cup M_2 = M_2$.

Aufgabe 5

a) Eine injektive Abbildung ist beispielsweise gegeben durch $f_1 : M_1 \to M_2, 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 4, 7 \mapsto 8$. Nicht injektiv ist z.B. $f_2 : M_1 \to M_2,\ 2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 7 \mapsto 8$. Beide Abbildungen sind nicht surjektiv. Surjektive Abbildungen und damit auch bijektive Abbildungen von M_1 nach M_2 gibt es nicht, weil M_2 mehr Elemente als M_1 enthält.

Aus dem gleichen Grund existiert keine injektive Abbildung $M_2 \to M_1$. Ist etwa $g_1 : M_2 \to M_1$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2, 8 \mapsto 2$ und $9 \mapsto 7$, so ist g_1 nicht surjektiv. Definiert man z.B. $g_2 : M_2 \to M_1$, $2 \mapsto 2, 4 \mapsto 2,\ 8 \mapsto 4$ und $9 \mapsto 7$, dann ist g_2 surjektiv.

b) **i)** Die Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ seien bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv.
Um die Bijektivität von $h := g \circ f$ zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass h sowohl injektiv als auch surjektiv ist.
Zuerst zeigen wir, dass h injektiv ist, dass also für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$\text{Aus } x_1 \neq x_2 \text{ folgt } h(x_1) \neq h(x_2).$$

Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ beliebig. Zu zeigen ist $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Wegen der Injektivität von f gilt dann $f(x_1) \neq f(x_2)$. Wegen der Injektivität von g folgt daraus aber $g\big(f(x_1)\big) \neq g\big(f(x_2)\big)$, und nach Definition der Komposition bedeutet dies gerade $h(x_1) \neq h(x_2)$.
Jetzt müssen wir noch die Surjektivität von h zeigen; diese folgt aus der Surjektivität von f und g. Zu zeigen ist $h(X) = Z$, also:

$$\text{Zu jedem } z \in Z \text{ existiert ein } x \in X \text{ mit } h(x) = z.$$

Sei dazu $z \in Z$ beliebig. Wir suchen nun ein $x \in X$ mit $h(x) = z$.
Da g surjektiv ist, existiert zu z ein $y \in Y$ mit $g(y) = z$. Da f surjektiv ist, gibt es zu diesem $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Es folgt:

$$h(x) = g\big(f(x)\big) = g(y) = z.$$

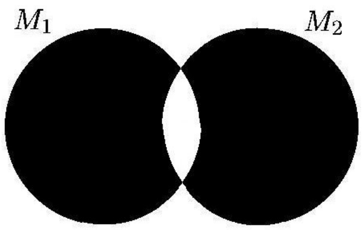
ii) Es seien $h = g \circ f$ surjektiv und g injektiv. Wir wollen zeigen, dass dann f surjektiv ist.
Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Nun müssen wir begründen, warum es $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Wir betrachten $g(y) \in Z$. Da $h : X \to Z$ surjektiv ist, existiert zu $g(y) \in Z$ ein $x \in X$ mit

$$g(y) = h(x) = g\big(f(x)\big).$$

Wegen der Injektivität von g folgt hieraus $y = f(x)$ und damit die Surjektivität von f.

Aufgabe 6

Sind M_1 und M_2 Teilmengen vom M, so entspricht $M_1 \,\Delta\, M_2$ der dunkel markierten Menge im nachstehenden Diagramm:



a) Für jedes $M_1 \subset M$ gilt gemäß Definition von Δ

$$M_1 \,\Delta\, M_1 = (M_1 \setminus M_1) \cup (M_1 \setminus M_1) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

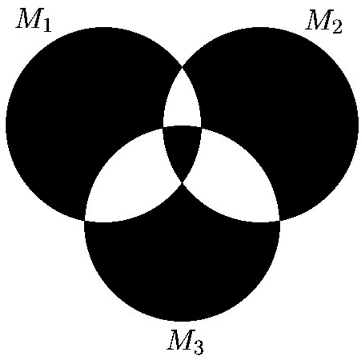
b) Für eine beliebige Teilmenge M_1 von M ist

$$M_1 \,\Delta\, \emptyset = (M_1 \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus M_1) = M_1 \cup \emptyset = M_1.$$

c) In dieser Aufgabe sollen wir die Assoziativität der Abbildung $\Delta : \mathrm{Pot}(M) \times \mathrm{Pot}(M) \to \mathrm{Pot}(M)$, $(M_1, M_2) \mapsto M_1 \,\Delta\, M_2$ zeigen, also

$$M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) = (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3 \quad \text{für alle } M_1, M_2, M_3 \in \mathrm{Pot}(M).$$

Es seien $M_1, M_2, M_3 \subset M$. Wie wir uns graphisch überlegen können, entspricht sowohl $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ als auch $(M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ der im nachstehenden Diagramm dunkel markierten Fläche:



Demzufolge sind die Mengen $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ und $(M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ gleich; es gilt

$$\begin{aligned}
&M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) \\
&= \big(M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)\big) \cup \big(M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)\big) \cup \big(M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)\big) \cup (M_1 \cap M_2 \cap M_3) \\
&= (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3.
\end{aligned}$$

Ein Element $x \in M_1 \cup M_2 \cup M_3$ gehört also genau dann zu $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3) = (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$, wenn x nicht in genau zwei der drei Mengen M_1, M_2, M_3 liegt.

Auf dieses Ergebnis können wir auch ohne graphische Überlegungen kommen, indem wir die folgenden acht Fälle unterscheiden:

Fall 1: $x \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$.
Dann ist $x \in M_1$ und $x \notin M_2 \,\Delta\, M_3$ und damit $x \in M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$.
Ferner ist $x \in M_3$ und $x \notin M_1 \,\Delta\, M_2$, woraus $x \in (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ folgt.

Fall 2: $x \in M_1 \setminus (M_2 \cup M_3)$, also $x \in M_1$ und $x \notin M_2 \cup M_3$.
Da x nicht in $M_2 \cup M_3$ liegt, gehört x auch nicht zu $M_2 \,\Delta\, M_3$. Somit ist $x \in M_1 \setminus (M_2 \,\Delta\, M_3) \subset M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$.
Wegen $x \in M_1 \setminus M_2$ ergibt sich $x \in M_1 \,\Delta\, M_2$. Aufgrund von $x \notin M_3$ erhalten wir hieraus $x \in (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$.

Fall 3: $x \in M_2 \setminus (M_1 \cup M_3)$.
Da x in M_2 enthalten ist, aber weder in M_1 noch in M_3 liegt, folgen $x \in M_1 \,\Delta\, M_2$ und $x \in M_2 \,\Delta\, M_3$. Daraus schließen wir, dass $x \in (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ bzw. $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ gilt, weil x zu $(M_1 \,\Delta\, M_2) \setminus M_3$ bzw. zu $(M_2 \,\Delta\, M_3) \setminus M_1$ gehört.

Fall 4: $x \in M_3 \setminus (M_1 \cup M_2)$.
Dieser Fall entspricht dem zweiten mit vertauschten Rollen für M_1 und M_3.

Fall 5: $x \in (M_1 \cap M_2) \setminus M_3$, also $x \in M_1 \cap M_2$ und $x \notin M_3$.
Wegen $x \in M_1 \cap M_2$ ist $x \notin M_1 \,\Delta\, M_2$. Nun liegt x auch nicht in M_3, folglich erhalten wir $x \notin (M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$.
Wegen $x \in M_1$ und $x \in M_2 \,\Delta\, M_3$, liegt x nicht in $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$.

Fall 6: $x \in (M_1 \cap M_3) \setminus M_2$.
Dieser Fall entspricht dem fünften mit vertauschten Rollen für M_2 und M_3.

Fall 7: $x \in (M_2 \cap M_3) \setminus M_1$.
Dieser Fall entspricht dem fünften mit vertauschten Rollen für M_1 und M_3.

Fall 8: $x \in M \setminus (M_1 \cup M_2 \cup M_3)$.
Hier ist sofort klar, dass x weder in $(M_1 \,\Delta\, M_2) \,\Delta\, M_3$ noch in $M_1 \,\Delta\, (M_2 \,\Delta\, M_3)$ liegt.