Karlsruhe Institut für Technologie (KIT) WS 2017/18
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Der Ausdruck $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$ ist überall da definiert, wo der Nenner nicht verschwindet, also $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Der maximale Definitionsbereich von $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist ebenfalls $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Polynome wie $f_3(x) = x^2 + x + 1$ sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, also $D_3 = \mathbb{R}$.

Zur Bestimmung der Bildmenge $f_1(D_1)$ von f_1 setzen wir die Abbildung f_1 aus zwei Abbildungen zusammen. Seien

$$s : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \qquad \text{und} \qquad t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x - 1.$$

Dann sind sowohl s als auch t_{-1} bijektiv [s injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow 1/x_1 \neq 1/x_2 \Rightarrow s(x_1) \neq s(x_2)$; s surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := 1/y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $s(x) = s(1/y) = y$. t_{-1} injektiv: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 1 \neq x_2 - 1 \Rightarrow t_{-1}(x_1) \neq t_{-1}(x_2)$; t_{-1} surjektiv: Sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x := y + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt $t_{-1}(x) = t_{-1}(y+1) = (y+1) - 1 = y$.] Nach Aufgabe 6 b) i) vom 1. Übungsblatt ist $s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bijektiv. ($s \circ t_{-1}$ ist erlaubt, weil $t_{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und s hierauf definiert ist!) Da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$s \circ t_{-1}(x) = s(t_{-1}(x)) = s(x-1) = \frac{1}{x-1} = f_1(x)$$

gilt, folgt

$$f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = (s \circ t_{-1})(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für $f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ist folgende Umformung sehr hilfreich

$$f_2(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} = 1 + 2 \cdot f_1(x) \qquad \text{für } x \neq 1. \tag{1}$$

Wegen

$$\begin{aligned} y \in f_2(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \ y = f_2(x) \overset{(1)}{=} 1 + 2 \cdot f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \ \frac{y-1}{2} = f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{2} \in f_1(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \end{aligned}$$

gilt $f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bei $f_3(x) = x^2 + x + 1$ ist eine quadratische Ergänzung günstig:

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{3}{4}.$$

Der Graph der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + \frac{1}{2})^2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel, ihr Bildbereich ist also die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Für die Bildmenge von f_3 erhalten wir

$$f_3(D_3) = \Big\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \frac{3}{4}\Big\} = \Big[\frac{3}{4}, \infty\Big).$$

b) Im a)-Teil haben wir bereits gesehen, dass f_1 injektiv ist. Alternativ: f_1 ist injektiv, denn für alle $x, y \in D_1$ mit $x \neq y$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 \neq y - 1 \quad \overset{x,y \neq 1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_2(y).$$

Die Abbildung f_2 ist ebenfalls injektiv. Dies folgt aus der Injektivität von f_1 und (1), denn für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$x \neq y \quad \Leftrightarrow \quad f_1(x) \neq f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2 \cdot f_1(x) \neq 1 + 2 \cdot f_1(y) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) \neq f_2(y).$$

Wegen $f_3(-1) = 1 = f_3(0)$ ist f_3 nicht injektiv.

Nun zu den Umkehrabbildungen: Eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ besitzt keine Umkehrabbildung, wenn die Zielmenge Y echt größer als die Bildmenge $f(X)$ ist. Wir betrachten daher die Abbildung $f : X \to f(X)$ (diese ist automatisch surjektiv!); dies ist eine bijektive Abbildung, welche wir umkehren können. Im folgenden seien also $f_i : D_i \to f_i(D_i)$.

Die Umkehrabbildung von $f_1 = s \circ t_{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nach Satz 3.6 gegeben durch

$$(f_1)^{-1} = (s \circ t_{-1})^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1}.$$

Definieren wir

$$t_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad x \mapsto x + 1,$$

so sind die Abbildungen t_{-1} und t_1 einander invers, denn es gilt

$$\begin{aligned} t_1 \circ t_{-1}(x) &= t_1(t_{-1}(x)) = t_1(x - 1) = (x - 1) + 1 = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ t_{-1} \circ t_1(x) &= t_{-1}(t_1(x)) = t_{-1}(x + 1) = (x + 1) - 1 = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung s ist wegen $s \circ s(x) = s(s(x)) = \frac{1}{1/x} = x$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu sich selbst invers, d.h. $s^{-1} = s$. Hiermit erhalten wir

$$(f_1)^{-1} = (t_{-1})^{-1} \circ s^{-1} = t_1 \circ s,$$

also

$$(f_1)^{-1} : f_1(D_1) \to D_1, \quad y \mapsto (t_1 \circ s)(y) = t_1(s(y)) = t_1\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y}.$$

Zur Bestimmung von $(f_2)^{-1}$ lösen wir die Gleichung $f_1(x) = y$ nach x auf (hier sind $x \in D_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}, y \in f_2(D_2) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$):

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} = y \quad &\Leftrightarrow \quad x + 1 = y(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad x(1 - y) = -y - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-y-1}{1-y} = \frac{y+1}{y-1} = f_2(y). \end{aligned}$$

Also ist f_2 ihre eigene Umkehrabbildung: $(f_2)^{-1} = f_2$.

c) Erlaubt sind genau die Kompositionen $f_i \circ f_j$ mit $f_j(D_j) \subset D_i$. Hier sind dies:

$$f_3 \circ f_1, \quad f_3 \circ f_2, \quad f_3 \circ f_3, \quad f_2 \circ f_2, \quad f_1 \circ f_2.$$

Alle anderen sind nicht erlaubt.

Wegen $2 \in f(D_3)$ und $f_1(2) = 1$, aber $1 \notin D_2$ ist $f_2 \circ (f_1 \circ f_3)$ nicht erlaubt.

d) Es ist

$$f_1 \circ f_2 : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_1(f_2(x)) = f_1\Big(\frac{x+1}{x-1}\Big) = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}} = \frac{1}{\frac{2}{x-1}} = \frac{x-1}{2}.$$

Aufgabe 2

a) Es gilt

$$|x-4| = |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)^2 = (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2x + 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 10x = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

Alternativ führen auch geometrische Überlegungen zum Ziel: Gesucht sind diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die denselben Abstand zu 4 wie zu -1 haben, d.h. x liegt genau in der Mitte: $x = \frac{4+(-1)}{2} = \frac{3}{2}$.

Eine weitere Alternative besteht darin, die Fallunterscheidung $x \in (-\infty, -1]$, $x \in (-1, 4]$, $x \in (4, \infty)$ durchzuführen, um die Beträge aufzulösen...

b) $|2x| > |5 - 2x|$ besagt, dass notwendig $x \neq 0$ sein muss. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt aber

$$|2x| > |5-2x| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{5-2x}{2x}\right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \underbrace{\frac{5-2x}{2x}}_{=\frac{5}{2x}-1} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{5}{2x} < 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{5}\,x > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{5}{4}.$$

c) Es ist

$$|2 - |2-x|| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant 2 - |2-x| \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leqslant -|2-x| \leqslant -1$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 \leqslant |2-x| \leqslant 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leqslant 2 - x \leqslant 3 \text{ oder } -3 \leqslant 2-x \leqslant -1$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 \leqslant -x \leqslant 1 \text{ oder } -5 \leqslant -x \leqslant -3 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{oder} \quad 3 \leqslant x \leqslant 5$$
$$\Leftrightarrow \quad x \in [-1,1] \cup [3,5].$$

d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall: $x \in (-\infty, -1)$. Mit $|x+1| = -(x+1)$ und $|x-1| = -(x-1)$ ergibt sich

$$|x+1| + |x-1| = -2x.$$

Deshalb gilt

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1.$$

2. Fall: $x \in [-1, 1)$. Hier ist $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = -(x-1)$, also

$$|x+1| + |x-1| = 2.$$

Demzufolge lautet in diesem Fall die Ungleichung: $2 > 2$. Diese ist unlösbar.

3. Fall: $x \in [1, \infty)$. Wegen $|x+1| = x+1$ und $|x-1| = x-1$ folgt

$$|x+1| + |x-1| = 2x$$

und damit

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Zusammenfassend haben wir:

$$|x+1| + |x-1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ oder } x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

e) Wir führen eine Fallunterscheidung durch.

1. Fall: $x < 0$. Dann ist $|x| = -x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x\Big(x^2 - x + \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < -4x\underbrace{\Big[\Big(x - \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big]}_{\geqslant \frac{1}{2} > 0} \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < -4x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0.
\end{aligned}$$

2. Fall: $x \geqslant 0$. Dann ist $|x| = x$, und es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x < 4x^2(1+x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x^3 + 4x^2 - 3x \\
&\Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big(x^2 + x - \frac{3}{4}\Big) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 4x\Big[\Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1\Big] \\
&\Leftrightarrow \quad 4x > 0 \ \text{ und } \ \Big(x + \frac{1}{2}\Big)^2 - 1 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \ \text{ und } \ \Big|x + \frac{1}{2}\Big| > 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \ \text{ und } \ \Big(x + \frac{1}{2} > 1 \ \text{ oder } \ x + \frac{1}{2} < -1\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > 0 \ \text{ und } \ \Big(x > \frac{1}{2} \ \text{ oder } \ x < -\frac{3}{2}\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad x > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Demzufolge gilt $\frac{3x}{1+|x|} < 4x^2$ genau für $x \in \mathbb{R}$ mit $x < 0$ oder $x > \frac{1}{2}$.

f) Auf keinen Fall kommt $x = 1$ in Frage, denn die Division durch 0 ist nicht definiert. Ansonsten multiplizieren wir die Ungleichung mit $1 - x$. Dabei müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

1. Fall: Sei zunächst $1 - x > 0$, also $x < 1$. Multiplikation mit $1 - x$ liefert

$$\begin{aligned}
2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \geqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2x^2 + 1 \geqslant 1 - x \\
&\Leftrightarrow \quad 3x - 2x^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $0 \leqslant x \leqslant 3/2$. Da wir im 1. Fall nur $x < 1$ betrachten, ergibt sich also $0 \leqslant x < 1$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, was nicht gleichzeitig möglich ist.

2. Fall: Jetzt sei $1 - x < 0$, also $x > 1$. Dann dreht sich bei Multiplikation mit $1 - x$ das $\geqslant$ um, und wir erhalten

$$2x + \frac{1}{1-x} \geqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(1-x) + 1 \leqslant 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x(3-2x) \leqslant 0.$$

Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn $x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ oder aber wenn $x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$.

$x \geqslant 0$ und $3 - 2x \leqslant 0$ bedeutet $x \geqslant 0$ und $x \geqslant 3/2$, also $x \geqslant 3/2$.

$x \leqslant 0$ und $3 - 2x \geqslant 0$ bedeutet $x \leqslant 0$ und $x \leqslant 3/2$, also $x \leqslant 0$. Da wir im 2. Fall nur $x > 1$ betrachten, ist dies hier nicht möglich.

Insgesamt: Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $0 \leqslant x < 1$ oder $x \geqslant 3/2$.

Aufgabe 3

a) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wegen $0 \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$ (Dreiecksungleichung!) erhalten wir

$$0 < 1 \leqslant 1+|x+y| \leqslant 1+|x|+|y|,$$

woraus

$$\frac{1}{1+|x+y|} \geqslant \frac{1}{1+|x|+|y|} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{1+|x+y|} \leqslant -\frac{1}{1+|x|+|y|} \tag{2}$$

folgt. Mit zweimaliger Verwendung des Tipps kommen wir auf

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = 1 - \frac{1}{1+|x+y|} \overset{(2)}{\leqslant} 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Damit ist die erste behauptete Ungleichung bewiesen. Nun zur zweiten: Es gilt

$$\begin{aligned} & |x|+|y| \geqslant |x| \geqslant 0 \\ \Rightarrow\ & 1+|x|+|y| \geqslant 1+|x| \geqslant 1 > 0 \\ \Rightarrow\ & \frac{1}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{1}{1+|x|} \\ \overset{|x|\geqslant 0}{\Rightarrow}\ & \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|}. \end{aligned}$$

Ebenso (vertausche x und y) bekommen wir

$$\frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Damit ergibt sich

$$\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

b) Wiederum seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir betrachten die beiden Fälle $x-y \geqslant 0$ und $x-y<0$.

1. Fall: $x \geqslant y$. Dann ist $|x-y| = x-y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y-(x-y)}{2} = \frac{2y}{2} = y = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

2. Fall: $x < y$. Dann ist $|x-y| = -(x-y) = -x+y$, und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{x+y+|x-y|}{2} &= \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \max\{x,y\}, \\ \frac{x+y-|x-y|}{2} &= \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x = \min\{x,y\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Mit quadratischer Ergänzung erkennen wir

$$x^2-x+2 = x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \geqslant \frac{7}{4}.$$

Wegen $(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{4} \in \{x^2-x+2 : x \in \mathbb{R}\}$ folgt

$$\min\{x^2-x+2 : x \in \mathbb{R}\} = \inf\{x^2-x+2 : x \in \mathbb{R}\} = \frac{7}{4}.$$

Da $\{x^2-x+2 : x \in \mathbb{R}\}$ nach oben unbeschränkt ist, existieren Maximum und Supremum von $\{x^2-x+2 : x \in \mathbb{R}\}$ nicht.

b) Wir erkennen sofort, dass $B := \{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist. Zur Bestimmung des Supremums, also der kleinsten oberen Schranke, bemerken wir, dass der Ausdruck $(-1)^n + \frac{1}{n}$ für ungerade natürliche Zahlen $\leqslant 0$ ist. Da $(-1)^n = 1$ für gerade $n \in \mathbb{N}$ gilt und $n \mapsto \frac{1}{n}$ fallend ist, folgern wir aus $(-1)^n + \frac{1}{n} \leqslant (-1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$: $\sup B = \max B = \frac{3}{2}$.

Nun zur unteren Schranke. Wir behaupten: $\inf B = -1 \notin B$, d.h. das Minimum von B existiert nicht.

Wir müssen uns zunächst davon überzeugen, dass -1 überhaupt eine untere Schranke von B ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt in der Tat

$$(-1)^n + \frac{1}{n} \geqslant (-1)^n \geqslant -1.$$

Nun zeigen wir, dass -1 auch die größte untere Schranke ist. Dazu nehmen wir an, dass es eine größere untere Schranke K gibt, etwa $K = -1 + \varepsilon$ mit einem $\varepsilon > 0$, und führen dies zu einem Widerspruch. Es soll also gelten

$$K \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Da dies insbesondere für ungerade n gilt, folgt für alle ungeraden $n \in \mathbb{N}$

$$-1 + \varepsilon \leqslant -1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon \leqslant \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \leqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dies kann jedoch nicht sein, weil die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Also ist die Annahme falsch, und es gilt $-1 = \inf B$.

c) Die Menge $C := \{x + \frac{1}{x} : 0 < x \leqslant 42\}$ ist nicht nach oben beschränkt. Wäre nämlich Γ eine obere Schranke von C, so müsste

$$\forall x \in (0, 42]: \quad x + \frac{1}{x} \leqslant \Gamma$$

gelten. Insbesondere könnten wir dann $x = \frac{1}{n} \in (0, 42]$ einsetzen und erhielten: $\frac{1}{n} + n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Erst recht hätten wir dann $n \leqslant \Gamma$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch dazu, dass $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Somit existieren weder Supremum noch Maximum von C.

Die Menge C ist aber nach unten durch 2 beschränkt, denn für $x > 0$ erhalten wir durch Multiplikation mit x

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geqslant 2x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \geqslant 0$$

und letzteres ist offensichtlich wahr. Zudem gilt $2 \in A$ (man setze $x = 1$). Damit wissen wir: Keine Zahl > 2 kann untere Schranke von C sein. Also ist $\inf C = 2$ und wegen $2 \in C$ folgt auch $\min C = 2$.

d) Wir setzen $D := \{\frac{x^2}{1+x^2} : x \in \mathbb{R}\}$. Offenbar gilt $x^2(1+x^2)^{-1} \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Außerdem ist $0 \in D$ (man setze $x = 0$). Damit folgt: Infimum und Minimum von D existieren, und es ist $\inf D = \min D = 0$.

Die Menge D ist nach oben durch 1 beschränkt, denn wegen $1 + x^2 > 0$ gilt

$$\frac{x^2}{1+x^2} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 1 + x^2.$$

Die letzte Ungleichung ist natürlich für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Wir zeigen nun, dass 1 sogar die *kleinste* obere Schranke ist. Sei $\Gamma < 1$ beliebig; wir wollen zeigen, dass Γ keine obere Schranke von D ist. Wir müssen also ein $x \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\frac{x^2}{1+x^2} > \Gamma.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x^2 > \Gamma(1+x^2), \quad \text{also} \quad (1-\Gamma)x^2 > \Gamma, \quad \text{d. h.} \quad x^2 > \frac{\Gamma}{1-\Gamma}$$

und die letzte Ungleichung ist für hinreichend große x offenbar erfüllt.

Aufgabe 5

Zunächst zum Supremum: Da A und B beschränkt, also insbesondere nach oben beschränkt sind, existieren $\alpha := \sup A$ und $\beta := \sup B$. Wir müssen nun zeigen, dass $A + B$ nach oben beschränkt ist und $\sup(A + B) = \alpha + \beta$ gilt. Dazu müssen wir zwei Dinge beweisen: Zum einen, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke von $A + B$ ist; zum anderen, dass dies auch die *kleinste* obere Schranke ist.
Wählen wir ein beliebiges $x \in A + B$, so gibt es $a \in A$ und $b \in B$ mit $x = a + b$. Da α bzw. β obere Schranken für A bzw. B sind, gilt $a \leqslant \alpha$ und $b \leqslant \beta$. Addieren dieser beiden Gleichungen liefert

$$x = a + b \leqslant \alpha + \beta.$$

Damit wissen wir, dass $\sup(A + B) \leqslant \alpha + \beta$ ist, d. h. $A + B$ ist nach oben beschränkt und $\alpha + \beta$ ist eine obere Schranke.
Aber ist dies auch die *kleinste* obere Schranke? Dies können wir garantieren, wenn wir zeigen: Keine Zahl $< \alpha + \beta$ ist obere Schranke, d. h. zu jeder Zahl $\Gamma < \alpha + \beta$ existiert ein $x \in A + B$ mit $x > \Gamma$.
Sei also $\Gamma < \alpha + \beta$ beliebig. Dann ist $\Gamma - \alpha < \beta$ und, da β die *kleinste* obere Schranke von B ist, muss ein $b \in B$ existieren mit $b > \Gamma - \alpha$. Es gilt also $\alpha > \Gamma - b$. Daher existiert wiederum ein $a \in A$ mit $a > \Gamma - b$, d. h. es ist $a + b > \Gamma$, und wegen $a + b \in A + B$ kann damit Γ keine obere Schranke von $A + B$ sein.
Nun zum Infimum: Da A und B nach unten beschränkt sind, folgt genau wie oben, dass auch $A+B$ nach unten beschränkt ist. Aus der Vorlesung kennen wir das folgende Resultat: Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$, M sei beschränkt. Setze $-M := \{-x : x \in M\}$. Dann ist γ genau dann eine untere Schranke von M, wenn $-\gamma$ obere Schranke von $-M$ ist. Hieraus folgt $\inf(M) = -\sup(-M)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf(A + B) &= -\sup\big(-(A + B)\big) = -\sup\big((-A) + (-B)\big) = -\big(\sup(-A) + \sup(-B)\big) \\ &= -\big(-\inf A + (-\inf B)\big) = \inf A + \inf B. \end{aligned}$$