

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a) Wir zeigen zuerst, dass

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang (IA): Für $n = 1$ stimmt die Behauptung, denn beide Seiten der Gleichung ergeben dann 1: $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Induktionsschluss (IS): Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung, kurz: IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{1}{2}n+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \stackrel{\text{a)}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2.$$

b) IA: Für $n = 1$ ist $\prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 = \frac{2^2}{2} = \frac{(1+1)^{1+1}}{(1+1)!}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$ (IV). Dann gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{n+1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+2} = \frac{(n+2)^{n+2}}{(n+2)!} \\ &= \frac{((n+1)+1)^{(n+1)+1}}{((n+1)+1)!}. \end{aligned}$$

c) IA: Für $n = 1$ stimmt die behauptete Aussage, denn $6^1 - 5 \cdot 1 + 4 = 5$ ist durch 5 teilbar.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte die Behauptung, sei also $6^n - 5n + 4$ durch 5 teilbar, etwa $6^n - 5n + 4 = 5l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$. (IV)

Zu zeigen ist, dass dann auch $6^{n+1} - 5(n+1) + 4$ durch 5 teilbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} 6^{n+1} - 5(n+1) + 4 &= 6 \cdot 6^n - 5n - 5 + 4 = 6(6^n - 5n + 4) + 25n - 25 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 6 \cdot 5l + 25n - 25 = \underbrace{(6 \cdot l + 5n - 5)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Es seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $x, y \in [0, \infty)$. IA. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung. IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig und $x^n \leq y^n$. Dann gilt $x^{n+1} = x^n \cdot x \leq y^n \cdot x \leq y^n \cdot y = y^{n+1}$. Wir haben bewiesen, dass $x \leq y \Rightarrow x^n \leq y^n$.

Nehmen wir nun an, dass $x^n \leq y^n$, aber $x > y$. Das ist unmöglich, weil $y < x$ implementiert $y^n < x^n$.