

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektroingentechnik und Informationstechnik**
Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir beweisen die behauptete Identität durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

IA: Für $n = 1$ gilt $\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. (IV)

Für jedes $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ergibt sich damit

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} q^k = \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^{n-1} q^k + q^n \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1-q^n}{1-q} + q^n = \frac{1-q^n + q^n - q^n \cdot q}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Sind $w \neq z$ und $z \neq 0$, so setzen wir $q := \frac{w}{z}$. Dann ist $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und laut a) gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{w}{z}\right)^k &= \frac{1 - \left(\frac{w}{z}\right)^n}{1 - \frac{w}{z}} &\Leftrightarrow & \left(1 - \frac{w}{z}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{w}{z}\right)^k = 1 - \left(\frac{w}{z}\right)^n \\ & \stackrel{|\cdot z^n (\neq 0!)|}{\Leftrightarrow} & z \left(1 - \frac{w}{z}\right) z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} z^{-k} w^k &= z^n - w^n \\ & \Leftrightarrow & (z - w) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} w^k &= z^n - w^n. \end{aligned}$$

Im Fall $w = z$ lautet die behauptete Gleichung $0 = 0$, diese ist offensichtlich wahr.

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = \sum_{k=0}^{n-2} \underbrace{0^{n-1-k}}_{=0, \text{ da } n-1-k \geq 1} w^k + 0^{n-1-(n-1)} w^{n-1} = 0^0 w^{n-1} = w^{n-1}$$

ist die Gleichung im Fall $z = 0$

$$(0 - w) \sum_{k=0}^{n-1} 0^{n-1-k} w^k = -w \cdot w^{n-1} = -w^n = 0 - w^n$$

ebenfalls für jedes $w \in \mathbb{C}$ erfüllt.

c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k &\stackrel{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{i}{2}\right)^{l+1} = \frac{i}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{i}{2}\right)^l \stackrel{\text{a)}}{=} \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - (i/2)^n}{1 - i/2} \cdot \frac{1 + i/2}{1 + i/2} \\ &= \frac{i}{2} \cdot \frac{1 - (i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}}{1 - i^2/4} = \frac{i}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(1 - (i/2)^n + i/2 - (i/2)^{n+1}\right) \\ &= \frac{2}{5} i \left(1 + i/2\right) + \frac{2}{5} i \left(- (i/2)^n - (i/2)^{n+1}\right) = \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} i \left(-1 - i/2\right) (i/2)^n \\ &= \frac{2}{5} i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5} i + \frac{1}{5}\right) \frac{i^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Nun seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ mit $n = 4m + r$. Dann gilt

$$i^n = i^{4m+r} = i^{4m} \cdot i^r = (i^4)^m \cdot i^r = 1^m \cdot i^r = i^r$$

und damit

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{i^r}{2^n}.$$

Für $r = 0$ (also, falls n durch 4 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\right).$$

Für $r = 1$ (also, falls n durch 4 mit Rest 1 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{i}{2^n} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}\right).$$

Für $r = 2$ (also, falls n durch 4 mit Rest 2 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{-1}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n} + i \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}\right).$$

Für $r = 3$ (also, falls n durch 4 mit Rest 3 teilbar ist) gilt

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{2}{5}i - \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{5}i + \frac{1}{5}\right) \frac{-i}{2^n} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}} + i \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}\right).$$

Wir lesen ab:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k \right) = \begin{cases} -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ -\frac{1}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{i}{2}\right)^k \right) = \begin{cases} \frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 1 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \cdot 2^{n-1}}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 2 teilbar ist} \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5 \cdot 2^n}, & \text{falls } n \text{ durch 4 mit Rest 3 teilbar ist} \end{cases}$$

Aufgabe 2

- a) Es gilt: $z^3 = (3 - i)^3 = (3 - i)(9 - 6i + i^2) = (3 - i)(8 - 6i) = 24 - 18i - 8i + 6i^2 = 18 - 26i$.
Folglich hat z^3 den Realteil 18 und den Imaginärteil -26 . Ferner ist $|z^3| = \sqrt{18^2 + (-26)^2} = \sqrt{1000} = 10\sqrt{10}$. Alternativ kann man $|z^3|$ auch berechnen, ohne z^3 bestimmt zu haben:
 $|z^3| = |z|^3 = \sqrt{3^2 + (-1)^2}^3 = \sqrt{10}^3 = 10\sqrt{10}$.
- b) Wir erweitern den Bruch geeignet (Standardtrick: $z\bar{z}$ ist reell, daher ergibt $1/z = 1/z \cdot \bar{z}/\bar{z} = \bar{z}/(z\bar{z})$ einen reellen Nenner):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 - i} = \frac{1}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} = \frac{3 + i}{3^2 - i^2} = \frac{3 + i}{10} = \frac{3}{10} + \frac{1}{10}i.$$

Also hat $1/z$ den Realteil $\frac{3}{10}$ und den Imaginärteil $\frac{1}{10}$. Der Betrag von $1/z$ ist $|1/z| = \sqrt{\frac{9}{100} + \frac{1}{100}} = \sqrt{1/10} = \sqrt{10}/10$, alternativ: $|1/z| = 1/|z| = 1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$.

- c) Es ergibt sich $z \cdot w = (3 - i)(-1 + 2i) = -3 + 6i + i - 2i^2 = -1 + 7i$. Also hat $z \cdot w$ Realteil -1 und Imaginärteil 7 . Außerdem gilt $|z \cdot w| = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = |z| \cdot |w|$.

- d) Es ist $\bar{z}^2 = (\overline{3-i})^2 = (3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 8+6i$ und wegen $w^2 = (-1+2i)^2 = 1-4i+4i^2 = -3-4i$ ergibt sich

$$\frac{1}{w^2} = \frac{1}{-3-4i} \cdot \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-3+4i}{9-16i^2} = \frac{-3+4i}{25} = -\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i.$$

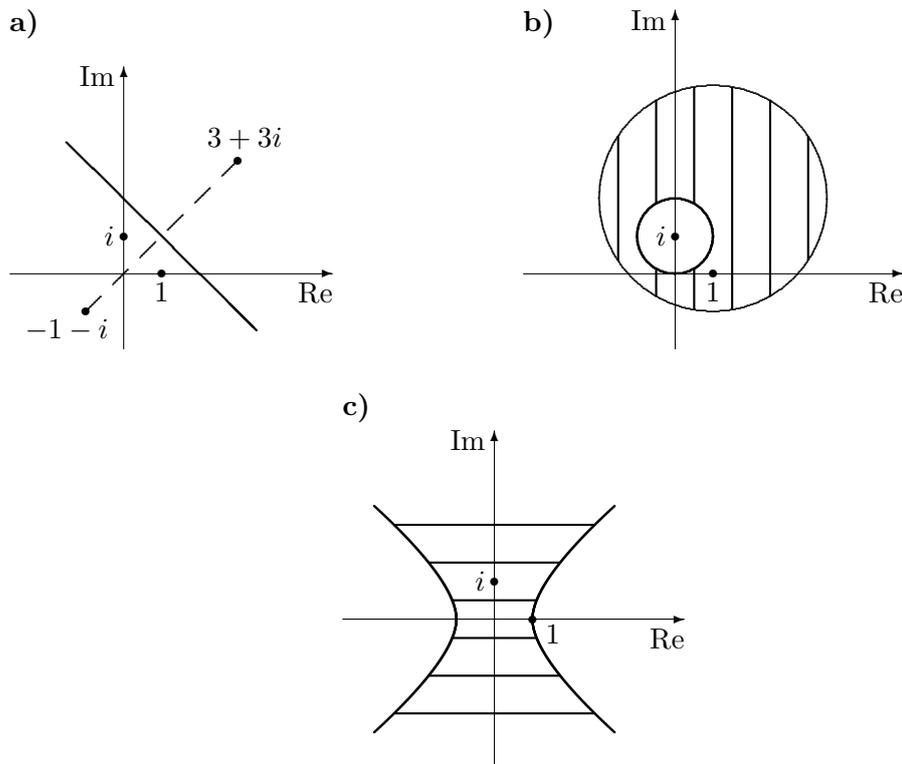
$\bar{z}^2 + 1/w^2 = (8+6i) + (-\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i)$ hat somit Realteil $8 - \frac{3}{25} = \frac{197}{25}$ und Imaginärteil $6 + \frac{4}{25} = \frac{154}{25}$. Der Betrag von $\bar{z}^2 + 1/w^2$ lautet $|\bar{z}^2 + 1/w^2| = \sqrt{197^2 + 154^2}/25 = \sqrt{2501}/5$.

Aufgabe 3

- a) Hier handelt es sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die vom Punkt $-1-i$ den gleichen Abstand haben wie vom Punkt $3+3i$. Das ist die Mittelsenkrechte der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also die Gerade $\text{Im } z = -\text{Re } z + 2$.
- b) Dies ist der Schnitt zwischen dem Äußeren des Kreises um i mit Radius 1 (einschließlich der Kreislinie) und dem Inneren des Kreises um $1+2i$ mit Radius 3 (ohne Rand). Die Menge ist in der Skizze schraffiert.
- c) Die komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) liegt genau dann in dieser Menge, wenn

$$1 \geq \text{Re}(z^2) = \text{Re}((x+iy)^2) = \text{Re}(x^2 + 2ixy - y^2) = x^2 - y^2$$

gilt, d. h. für $x^2 \leq 1 + y^2$, also $|x| \leq \sqrt{1 + y^2}$ bzw. $-\sqrt{1 + y^2} \leq x \leq \sqrt{1 + y^2}$. Die Menge ist in der Skizze schraffiert; man beachte, dass es sich um eine unbeschränkte Menge handelt.



Aufgabe 4

- a) Es gilt $z^2 - 2z + 3 = (z-1)^2 + 2$. Die Gleichung $z^2 - 2z + 3 = 0$ ist also genau dann erfüllt, wenn $(z-1)^2 = -2$. Dies bedeutet $z-1 = i\sqrt{2}$ oder $z-1 = -i\sqrt{2}$, also hat die Gleichung die zwei Lösungen $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ und $z_2 = 1 - i\sqrt{2}$.

b) Mit dem Ansatz $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 z^2 = |z|^2 &\Leftrightarrow a^2 + 2aib + (ib)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + 2aib - b^2 = a^2 + b^2 \\
 &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} a^2 - b^2 = a^2 + b^2 \text{ und } 2ab = 0 \\
 &\Leftrightarrow -2b^2 = 0 \text{ und } (a = 0 \text{ oder } b = 0) \\
 &\Leftrightarrow b = 0 \text{ und } (a = 0 \text{ oder } b = 0) \\
 &\Leftrightarrow b = 0.
 \end{aligned}$$

[In (*) verwenden wir, dass zwei komplexe Zahlen genau dann gleich sind, wenn sie den selben Real- und Imaginärteil besitzen.]

Also ist $z^2 = |z|^2$ genau dann erfüllt, wenn $\text{Im}(z) = 0$ bzw. $z \in \mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 5

Mit Hilfe von $\text{Re}(\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda})$ (für $\lambda \in \mathbb{C}$) erhalten wir

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \underbrace{w\bar{z}}_{=\bar{w}z = \overline{z\bar{w}}} + w\bar{w} = |z|^2 + 2\text{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Daraus ergibt sich sofort

$$|z - w|^2 = |z|^2 + 2\text{Re}(z\overline{(-w)}) + |-w|^2 = |z|^2 - 2\text{Re}(z\bar{w}) + |w|^2.$$

Addiert man diese Gleichungen, so folgt $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.

Geometrische Bedeutung: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.

