Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W.Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18
15.11.2017

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Finden Sie Beispiele für Folgen mit den folgenden Eigenschaften:

- **i)** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau die Zahlen 1 und -1 als Häufungswerte.
- **ii)** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat jede natürliche Zahl als Häufungswert.
- **iii)** $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungswert und ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.
- **iv)** $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2018, aber $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton.
- **v)** $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat 0 als einzigen Häufungswert, jedoch konvergiert $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht.

b) Entscheiden Sie jeweils durch Beweis oder Gegenbeispiel, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass für alle $n \geqslant n_0$ gilt:

i) $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$; **ii)** $|a_n| < 2\varepsilon^2$; **iii)** $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$; **iv)** $|a_n a_{n+1}| < \varepsilon$;
v) $|a_n a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie alle Häufungswerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und geben Sie $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n)$ an.

a) $a_n = \big(1 + (-1)^n\big)^n$

b) $a_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n, & n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2, & n = 3k-1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (n+1)/n, & n = 3k-2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \end{cases}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen Wert a konvergiert, und geben Sie zu $\varepsilon = 10^{-10}$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an so, dass für alle $n \geqslant n_0$ stets $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt:

a) $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{n+1}+1}}$.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 4}{1 + n^2 + 4n^3}$

b) $a_n = (-1)^n + 1/n$

c) $a_n = \sqrt{9n^2 + 2n + 1} - 3n$

d) $a_n = \dfrac{(1+n)^{42} - n^{42}}{n^{41}}$

e) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

Aufgabe 5

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Nun seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Konvergiert die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 := \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert die Folge? Bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

Hinweis: Untersuchen Sie die Folge auf Beschränktheit und Monotonie.

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **3, 4 ,5 und 6**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.