

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
6. Übungsblatt

**Aufgabe 1**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{3^{2n+1}}$     b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

**Aufgabe 2**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$     c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$   
d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2}$     e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{n}$

**Aufgabe 3**

Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $b_n := \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(-1)^n\right)^n}{n^2}$ .

Was kann man mit dem Quotientenkriterium über die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sagen?  
Und was liefert das Wurzelkriterium?

**Aufgabe 4**

Ein Herr spaziert eine Distanz  $d$  mit Geschwindigkeit  $v$  nach Hause. Sein Hund freut sich und rennt mit Geschwindigkeit  $\frac{3}{2}v$  immer zwischen Herr und Haus hin und her.

- a) Bei welchen Distanzen  $(d)_{n \in \mathbb{N}}$  zum Haus begegnen sich Herr und Hund?
- b) Bestimmen Sie mit Hilfe von  $(d)_{n \in \mathbb{N}}$  die Gesamtweglänge des Hundes.
- c) An einem anderen Tag herrscht beim Rückweg Haus  $\rightarrow$  Herr Gegenwind, wodurch sich die Geschwindigkeit des Hundes in dieser Richtung auf  $\frac{4}{3}v$  reduziert. Welche Weglänge rennt der Hund nun?

### Aufgabe 5

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  definiere  $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ . Zeigen Sie, dass die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergiert, dass aber das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst divergiert.

*Bemerkung:* Dies ist ein Beispiel dafür, dass das Cauchyprodukt zweier konvergenter Reihen nicht konvergieren muss, wenn beide Reihen nicht absolut konvergieren.

### Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + - \dots$$

konvergiert, die daraus durch Umordnung entstehende Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + + - \dots$$

jedoch divergiert.

**Hinweis** Zeigen Sie, dass gilt

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right).$$

**Hinweis** In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2, 3 und 4**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.