

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt**

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k - 1 = E(z) - 1.$$

b) Nach der Definition der $E(z)$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z-1)^n = E(z-1) = \frac{E(z)}{e}.$$

c) Die Reihe lässt sich als Differenz zweier Potenzreihen darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1-2}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n.$$

Die erste Reihe ergibt $E(z)$, die zweite liefert für $z=0$ den Wert 2 und für $z \neq 0$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)!} z^n = \frac{2}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{2}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \frac{2}{z} (E(z) - 1).$$

Insgesamt folgt: Die von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{(n+1)!} z^n$ dargestellte Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(0) = E(0) - 2 = -1, \quad f(z) = E(z) - \frac{2E(z) - 2}{z} = \frac{(z-2)E(z) + 2}{z} \quad (z \neq 0).$$

d) Hier ergibt sich gemäß der Reihendarstellung der Sinus-Funktion für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+2} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z+1)^{2n+1} = (z+1) \sin(z+1).$$

Aufgabe 2

a) Für den Konvergenzradius R von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z+3i)^n$ mit $a_n := \frac{1}{n^2}$ ergibt sich wegen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

$R = 1^{-1} = 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ konvergiert also für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| < 1$ und divergiert für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| > 1$. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| = 1$ gilt

$$\left| \frac{(z+3i)^n}{n^2} \right| = \frac{|z+3i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{n^2}$ für $|z+3i| = 1$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Also konvergiert die Reihe genau für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z+3i| \leq 1$.

- b) Wegen $\sqrt[n]{|1/n^n|} = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ hat diese Reihe den Konvergenzradius ∞ , d. h. sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$.
- c) Für $a_n := (2n+1)/(n-1)^2$ gilt

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2n+1}{(n-1)^2} \cdot \frac{n^2}{2n+3} = \frac{2+1/n}{(1-1/n)^2} \cdot \frac{1}{2+3/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Die Reihe hat daher den Konvergenzradius 1. Wir müssen nun noch die Ränder des Konvergenzintervalls, also $x = -1$ und $x = 1$, untersuchen. Dies liefert die zwei Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2} (-1)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)^2}.$$

Die Konvergenz der ersten Reihe wird durch das Leibnizkriterium garantiert, denn

$$a_n = \frac{2n+1}{(n-1)^2} = \frac{2(n-1)+3}{(n-1)^2} = \frac{2}{n-1} + \frac{3}{(n-1)^2} \geq \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} = \frac{2n+3}{n^2} = a_{n+1}.$$

Die zweite Reihe hingegen divergiert wegen $a_n \geq 2n/n^2 = 2/n$ und des Minorantenkriteriums. Insgesamt: Die Reihe konvergiert nur für $x \in [-1, 1)$.

- d) Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius 1, denn

$$\sqrt[k]{|2^k z^{k^2}|} = \sqrt[k]{2^k} \cdot \sqrt[k]{|z|^{k^2}} = 2|z|^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & |z| < 1, \\ \infty, & |z| > 1. \end{cases}$$

Auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt keine Konvergenz vor, denn für $|z| = 1$ gilt $|2^k z^{k^2}| = 2^k \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$). Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{k^2}$ konvergiert somit nur für $|z| < 1$.

- e) Für $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ gilt offenbar $1 \leq a_n \leq n$. Wegen $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ folgt hieraus $\sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ hat also den Konvergenzradius $R = 1^{-1} = 1$. Für $|z| = 1$ konvergiert die Reihe nicht, denn dann gilt $|a_n z^n| = a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, d. h. die Reihenglieder konvergieren nicht gegen 0. Konvergenz der Reihe liegt also nur für $|z| < 1$ vor.

Aufgabe 3

- a) Das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

- b) Ebenso folgt aus $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ die Gleichung

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

und mit der aus der Vorlesung bekannten Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x, \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^2 x - 1. \end{cases}$$

- c) Das Additionstheorem liefert wegen $\cos(-b) = \cos b$ und $\sin(-b) = -\sin b$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Mit $a := \frac{1}{2}(x+y)$ und $b := \frac{1}{2}(x-y)$ erhält man also

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \\ &= (\sin a \cos b + \cos a \sin b) + (\sin a \cos b - \cos a \sin b) = 2 \sin a \cos b. \end{aligned}$$

d) Genau wie eben überlegen wir uns zunächst

$$\cos(a - b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

und erhalten dann mit $a := \frac{1}{2}(x + y)$ und $b := \frac{1}{2}(x - y)$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= \cos(a + b) + \cos(a - b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + (\cos a \cos b + \sin a \sin b) = 2 \cos a \cos b. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Es gilt $f(0) = b$ und $f(2) = c - 2$. Aus $f(0) = f(2) = 0$ folgt daher $b = 0$ und $c = 2$. Auf $(-\infty, 1)$ und auf $(1, \infty)$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Gemäß Satz 8.9 ist f stetig in 1 genau dann, wenn

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

gilt. Nun haben wir

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 + a = f(1) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 - 1 = 1;$$

also ist f genau für $a = -1$ stetig.