Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wir kennen die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ um die Entwicklungsstelle 0. In Verbindung mit dem Additionstheorem für $\sin z$ ergibt sich für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(1+z-1) = \sin(1)\cos(z-1) + \cos(1)\sin(z-1) \\ &= \sin(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(z-1)^{2k} + \cos(1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(z-1)^{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n \end{aligned}$$

mit

$$a_n = \begin{cases} \sin(1)\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \cos(1)\,\frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n!}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich ∞. Dies bedeutet $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$.

b) Wegen $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ ergibt sich für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}(2x)^{2k} = 1 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,2^{2k}x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit

$$a_n = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 0 \\ 0\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\,\frac{(-1)^{n/2}}{n!}\,2^n\,, & \text{falls } n \geqslant 2 \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Der Konvergenzradius ist ∞.

Aufgabe 2

a) Für $x \neq 1$ gilt wegen $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$

$$\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{(1+x)-2}{1-x^2} = \frac{(x-1)}{(1-x)(1+x)} = -\frac{1}{1+x}\,.$$

Damit ergibt sich für den Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\right) = -\frac{1}{2}\,.$$

b) Setzen wir zur Abkürzung $a := \sqrt[3]{8+x}$ und $b := 2$, so ergibt sich mit der bekannten Gleichung $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ [wieder geometrische Summenformel 4.11 (1) oder Polynomdivision] die Darstellung

$$\sqrt[3]{8+x} - 2 = a - b = \frac{(\sqrt[3]{8+x}\,)^3 - 2^3}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 2^2} = \frac{x}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4}\,.$$

Folglich hat man nach Satz 8.3 und Beispiel in 8.6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sqrt[3]{8+x}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8+x} + 4} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8}\,)^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}\,.$$

c) Dieser Grenzwert existiert nicht. Der Zähler des Bruchs hat in $x = 3$ nämlich keine Nullstelle, und wegen $(x^2 - x)/(x + 2) \to 6/5$ für $x \to 3$ gilt

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6} = \frac{1}{x - 3} \cdot \frac{x^2 - x}{x + 2} \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{für } x \to 3+\,, \\ -\infty & \text{für } x \to 3-\,. \end{cases}$$

d) Für alle $x \geqslant 1$ gilt

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1}\,)^2 - (\sqrt{x-1}\,)^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}\,,$$

Insgesamt ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/2}\Big(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\Big) = 1$$

e) Wir erhalten wegen $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ [vgl. 7.12 (6) oder über Reihenentwicklung des Sinus]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x}\,.$$

Bei dieser Umformung muss man beachten, dass aus $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ insbesondere folgt, dass $\sin x \neq 0$ in der Nähe von $x_0 = 0$ gilt.

Für jede Folge (x_n) mit $x_n \to 0$ und $x_n \neq 0$ hat man also $\sin x_n \to 0$ und $\sin x_n \neq 0$ für fast alle n. Daher folgt aus $\lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$$\frac{e^{\sin x_n} - 1}{\sin x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1\,.$$

Demnach existiert der zu untersuchende Grenzwert: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$.

Aufgabe 3

Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ mittels vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.
IA: Für $n = 1$ ist die Abschätzung trivial: $|\sin(1 \cdot x)| \leqslant 1 \cdot |\sin x|$.
IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Für dieses n gelte $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ (IV). Dann folgt mit Hilfe des Additionstheorems für Sinus

$$\begin{aligned} |\sin((n+1)x)| &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \leqslant |\sin(nx)| \cdot |\cos x| + |\cos(nx)| \cdot |\sin x| \\ &\overset{(**)}{\leqslant} |\sin(nx)| + |\sin x| \overset{\text{IV}}{\leqslant} n|\sin x| + |\sin x| = (n+1)|\sin x|\,. \end{aligned}$$

In $(**)$ verwendeten wir $|\cos y| \leqslant 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Dies, wie auch $|\sin y| \leqslant 1$, folgt sofort aus der Identität $(\sin y)^2 + (\cos y)^2 = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

a) Wir definieren die Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $h(x) := x - g(x)$. Dann ist h als Komposition stetiger Funktionen stetig. Wegen $g([a, b]) \subset [a, b]$ gilt $h(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$ und $h(b) = b - g(b) \geqslant b - b = 0$. Daher liegt $y_0 := 0$ zwischen den Funktionswerten $h(a)$ und $h(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es (mind.) ein $x_0 \in [a, b]$ mit $h(x_0) = 0$, d.h. $g(x_0) = x_0$.

b) Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist f nach Satz 8.3 stetig. Zudem ist für $x \geqslant 0$ offenbar $f(x) \geqslant 0$ und $f(x) = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3} \leqslant 1$. Deshalb gilt für die stetige Funktion $f : [0, 2] \to [0, 2]$ gemäß **a)**: Es gibt (mindestens) ein $x_0 \in [0, 2]$ mit $f(x_0) = x_0$. (Solch ein x_0 heißt *Fixpunkt* von f.)

Aufgabe 5

a) Seien $x, y \in (0, \infty)$. Da die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, ist die zu beweisende Ungleichung $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leqslant \ln \frac{x+y}{2}$ äquivalent zu

$$E\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) \leqslant E\left(\ln \frac{x+y}{2}\right).$$

Weil ln die Umkehrfunktion von E ist, ergibt sich hier auf der linken Seite

$$E\left(\frac{\ln x + \ln y}{2}\right) = \sqrt{E(\ln x + \ln y)} = \sqrt{E(\ln x)\, E(\ln y)} = \sqrt{xy}\,,$$

und auf der rechten Seite erhält man $\frac{x+y}{2}$. Also müssen wir lediglich

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

beweisen. Dies folgt mit der binomischen Formel:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}\,)^2 - 2\sqrt{xy} + (\sqrt{y}\,)^2}{2} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,)^2}{2} \geqslant 0\,.$$

b) Um $\ln x < x - 1$ für alle $x \in (1, \infty)$ mit $x \neq 1$ zu beweisen, verwenden wir, dass die Exponentialfunktion $E : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist, und erhalten

$$\ln x < x - 1 \quad \iff \quad E(\ln x) < E(x-1) \quad \iff \quad x < E(x-1)\,.$$

Für $x > 1$ gilt wegen $x - 1 > 0$

$$E(x-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!} > \frac{(x-1)^0}{0!} + \frac{(x-1)^1}{1!} = 1 + (x-1) = x\,.$$