

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils eine Potenzreihenentwicklung der Funktion f um die angegebene Entwicklungsstelle x_0 bzw. z_0 . Wie groß ist der Konvergenzradius?

a) $f(z) = \sin z, \quad z_0 = 1$ b) $f(x) = \cos^2 x, \quad x_0 = 0$

Hinweis: Benutzen Sie die Additionstheoreme für Sinus bzw. Cosinus.

Beispiel: $f(z) = e^z, z_0 = 1, e^z = e^{z-1} \cdot e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} (z-1)^n$.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, ob die Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 - x - 6}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/2} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Die Ungleichung $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Probieren Sie zuerst den Fall $n = 2$.

Aufgabe 4

Die Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{x+3}, \quad x \in [0, 2].$$

a) Beweisen Sie zunächst folgende Aussage: Ist eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ stetig, so gibt es mindestens ein $x_0 \in [a, b]$ mit $g(x_0) = x_0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = g(x) - x$.

b) Wenden Sie **a)** auf f an, um zu zeigen, dass ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 5

- a) Beweisen Sie für alle $x, y \in (0, \infty)$ die Abschätzung $\frac{\ln x + \ln y}{2} \leq \ln \frac{x+y}{2}$ indem Sie eine Beziehung zur Ungleichung $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ herstellen.
- b) Zeigen Sie, dass $\ln x < x - 1$ für alle $x > 1$.