

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
Elektrotechnik und Informationstechnik
Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Als Komposition stetiger Funktionen ist f auf $[-1, 1] \setminus \{0\}$ stetig. Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1 - (1-x^2)}{x(1 + \sqrt{1-x^2})} = \frac{x}{1 + \sqrt{1-x^2}}. \quad (1)$$

Demnach gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, und damit ist f auch stetig in 0.

- b) Wir zeigen zunächst $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$: Für $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt

$$|f(x)| \stackrel{(1)}{=} \frac{|x|}{\underbrace{1 + \sqrt{1-x^2}}_{\geq 0}} \leq |x| \leq 1.$$

Wegen $f(0) = 0$ ist $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in [-1, 1]$ bewiesen. Hieraus folgt $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$.

Nun zeigen wir $[-1, 1] \subset f([-1, 1])$. Sei dazu $y_0 \in [-1, 1]$. Dann liegt y_0 zwischen $f(-1) = -1$ und $f(1) = 1$. Aufgrund der Stetigkeit von f existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [-1, 1]$ mit $y_0 = f(x_0) \in \{f(x) : x \in [-1, 1]\} = f([-1, 1])$. Da $y_0 \in [-1, 1]$ beliebig war, folgt $[-1, 1] \subset f([-1, 1])$.

Insgesamt ergibt sich $f([-1, 1]) = [-1, 1]$.

Aufgabe 2

- a) Um Real- und Imaginärteil von z_1 zu ermitteln, betrachtet man am besten die Polarkoordinaten von $1 - i\sqrt{3}$. Die Länge dieser Zahl beträgt

$$|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$$

und nun gilt es noch, das Argument von $1 - i\sqrt{3}$ zu finden, d.h. $\varphi \in (-\pi, \pi]$ mit

$$1 - i\sqrt{3} = 2e^{i\varphi} = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{also} \quad \cos \varphi = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Dies ist genau für $\varphi = -\frac{1}{3}\pi$ der Fall; damit ist $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\pi/3}$. Es folgt

$$z_1 = (1 - i\sqrt{3})^{42} = (2e^{-i\pi/3})^{42} = 2^{42} e^{42(-i\pi/3)} = 2^{42} e^{-14\pi i} = 2^{42},$$

denn $e^{-14\pi i} = \cos(-14\pi) + i \sin(-14\pi) = 1$. Somit sind $\operatorname{Re} z_1 = 2^{42}$, $\operatorname{Im} z_1 = 0$, $|z_1| = 2^{42}$ und $\arg z_1 = 0$.

Wie zuvor gesehen, ist $1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\pi/3}$. Damit erhalten wir

$$z_2 = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}} \right)^{201} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} \right)^{201} = e^{i\frac{2\pi}{3} \cdot 201} = e^{134\pi i} = \cos(134\pi) + i \sin(134\pi) = 1.$$

Also sind $\operatorname{Re} z_2 = 1$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, $|z_2| = 1$ und $\arg z_2 = 0$.

b) Es sei $t \in (0, 2\pi)$. Wegen $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$z(t) = 1 - e^{it} = (e^{-it/2} - e^{it/2})e^{it/2} = -2i \sin(t/2) e^{it/2} = 2 \sin(t/2) e^{i(t-\pi)/2},$$

wobei für die letzte Umformung $-i = e^{-i\pi/2}$ verwendet wurde. Damit haben wir bereits die gesuchte Polardarstellung von $z(t)$ gefunden, denn für alle $t \in (0, 2\pi)$ gilt $\sin(t/2) > 0$ und $\frac{1}{2}(t - \pi) \in (-\pi, \pi]$. Also hat $z(t)$ die Länge $2 \sin(t/2)$ und das Argument $\frac{1}{2}(t - \pi)$.

c) Wir haben

$$z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2},$$

$$z^3 = e^{i\frac{15\pi}{4}} = \cos\left(\frac{15\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{i}{2}\sqrt{2}$$

und

$$z^{150} = e^{i\frac{750\pi}{4}} = \cos\left(\frac{750\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{750\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i,$$

weil $750 = 93 \cdot 8 + 6$ und somit $\frac{750\pi}{4} = 93 \cdot 2\pi + \frac{6\pi}{4}$ ist.

Aufgabe 3

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y, x + y \notin \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ gilt

$$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\cos x \cos y \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}\right)}{\cos x \cos y \left(1 - \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}\right)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}.$$

b) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cosh y + \sinh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{2e^y}{2} = e^y.$$

Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$(\cosh x + \sinh x)^n = (e^x)^n = e^{nx} = \cosh(nx) + \sinh(nx).$$

c) Für jedes $x \in (-1, 1)$ gilt

$$y = \operatorname{Artanh} x \iff x = \tanh y = \frac{\frac{1}{2}(e^y - e^{-y})}{\frac{1}{2}(e^y + e^{-y})} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \iff e^{2y}(x - 1) = -1 - x$$

$$\iff e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \iff 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \iff y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Aufgabe 4

i) Für $x \in \mathbb{R}$ ist

$$2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1} \iff 2^{x-1} - 2^{x+4} = 3^{x-1} - 3^{x+1}$$

$$\iff 2^x \left(\frac{1}{2} - 2^4\right) = 3^x \left(\frac{1}{3} - 3\right)$$

$$\iff 2^x \left(-\frac{31}{2}\right) = 3^x \left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$\iff \frac{2^x}{3^x} = \frac{8/3}{31/2} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{93}$$

$$\iff x = \log_2 \left(\frac{16}{93}\right) = \frac{\ln \frac{16}{93}}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{\ln 16 - \ln 93}{\ln 2 - \ln 3}.$$

ii) Die Gleichung $x^{\log_{10} x} = 100x$ ist nur für $x \in (0, \infty)$ sinnvoll. Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned}x^{\log_{10} x} = 100x &\iff \log_{10}(x^{\log_{10} x}) = \log_{10}(100x) \\&\iff (\log_{10} x)(\log_{10} x) = \log_{10}(100) + \log_{10}(x) \\&\iff (\log_{10} x)^2 - \log_{10}(x) - 2 = 0 \\&\iff (\log_{10} x - 2)(\log_{10}(x) + 1) = 0 \\&\iff \log_{10} x = 2 \quad \text{oder} \quad \log_{10}(x) = -1 \\&\iff x = 100 \quad \text{oder} \quad x = 10^{-1} = \frac{1}{10}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Alle Funktionen f_n sind stetig an der Stelle 0, denn für $x \neq 0$ gilt

$$|f_n(x)| = |x^n \sin(x^{-1})| \leq x^n,$$

woraus $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = f_n(0)$ folgt.

Die Funktion f_n ist differenzierbar in 0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \sin(x^{-1}) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \sin(x^{-1})$$

existiert. Für $n \geq 2$ existiert dieser Grenzwert [es handelt sich dann um $\lim_{x \rightarrow 0} f_{n-1}(x) = 0$], für $n = 1$ jedoch nicht: Für die Folge $(x_k)_k := ((\frac{\pi}{2} + k\pi)^{-1})_k$ gilt nämlich $x_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$), aber

$$\frac{f_1(x_k) - f_1(0)}{x_k - 0} = \sin(x_k^{-1}) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$$

konvergiert für $k \rightarrow \infty$ nicht.