

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
9. Übungsblatt

**Aufgabe 1**

Die Funktion  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{für } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $f$  stetig ist.  
b) Bestimmen Sie den Wertebereich  $f([-1, 1])$  von  $f$ .  
*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass  $|f(x)| \leq 1$  für alle  $x \in [-1, 1]$  gilt.  
c)

**Aufgabe 2**

- a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil, Betrag und Argument von

$$z_1 = (1 - i\sqrt{3})^{42}, \quad z_2 = \left( \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} \right)^{201}.$$

- b) Es sei  $t \in (0, 2\pi)$ . Ermitteln Sie die Polarkoordinaten von  $z(t) := 1 - e^{it}$ .  
c) Gegeben sei die komplexe Zahl  $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ . Berechnen Sie  $z^3$  und  $z^{150}$ .

**Aufgabe 3**

Zeigen Sie die Identitäten

- a)  $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x, y, x + y \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ;  
b)  $(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ ;  
c)  $\operatorname{Artanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  für alle  $x \in (-1, 1)$ .

**Aufgabe 4**

Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$ , für die gilt

- i)  $2^{x-1} + 3^{x+1} = 2^{x+4} + 3^{x-1}$ ;      ii)  $x^{\log_{10} x} = 100x$ .

## Aufgabe 5

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die Funktion  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(x^{-1}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche  $n$  die Funktion an der Stelle 0 stetig ist und für welche  $n \in \mathbb{N}$  sie differenzierbar ist.

**Hinweis** In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **1, 2a), 3c), 5**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.