Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W.Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Anwendung der Produkt- und Kettenregel liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2\sin(2x)\,e^{\sin x} + \cos(2x)\,e^{\sin x}\cos x = \big(\cos(2x)\,\cos x - 2\sin(2x)\big)\,e^{\sin x}\,.$$

b) Nach Definition gilt $f(x) = x^{\sqrt[3]{x}} = e^{\ln(x)\cdot\sqrt[3]{x}}$ für jedes $x > 0$.
Ist $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)\sqrt[3]{x}$ gesetzt, so ist $f(x) = e^{g(x)} = E(g(x))$. Die Kettenregel liefert

$$f'(x) = E'(g(x))\,g'(x) = E(g(x))\,g'(x) = f(x)\,g'(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Weiter gilt nach der Produktregel

$$g'(x) = \ln'(x)\,\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,(x^{1/3})' = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x} + \ln(x)\,\frac{1}{3}\,x^{-2/3} = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\ln(x))}{3x}\,, \qquad x \in (0,\infty)\,,$$

also

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x}\,(3+\log(x))}{3x}\,f(x)\,, \qquad x \in (0,\infty)\,.$$

Aufgabe 2

a) Hier betrachten wir die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \cos\sqrt{y}$. Die Kettenregel liefert, dass f auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist mit $f'(y) = \frac{-\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}$ für alle $y > 0$. Nach dem Mittelwertsatz existiert zu jedem $x > 1$ ein $\xi_x \in (x-1, x+1)$ mit

$$\frac{f(x+1) - f(x-1)}{(x+1)-(x-1)} = f'(\xi_x)\,, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}}{2} = \frac{-\sin\sqrt{\xi_x}}{2\sqrt{\xi_x}}\,.$$

Hieraus ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1}\right| = \left|\frac{\sin\sqrt{\xi_x}}{\sqrt{\xi_x}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\xi_x}} \overset{\xi_x\in(x-1,x+1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0$ ist der zu bestimmende Grenzwert 0.

b) Für $t > 0$ setzen wir $f(t) := t\ln t$. Dann ist f differenzierbar mit $f'(t) = 1\cdot\ln t + t\cdot\frac{1}{t} = 1 + \ln t$. Zu $x > y > 0$ existiert gemäß Mittelwertsatz ein $\xi \in (y,x)$ mit

$$x\ln x - y\ln y = (x-y)f'(\xi) = (x-y)(1+\ln\xi) \leqslant (x-y)(1+\ln x)\,.$$

Aufgabe 3

Nach der Kettenregel ist die Funktion f auf $(0,\infty)$ differenzierbar und für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(x^{-1})^2}\cdot\left(-x^{-2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

Da die Ableitung von f auf $(0,\infty)$ verschwindet, ist f dort konstant. Für alle $x > 0$ gilt

$$f(x) = f(1) = 2\arctan(1) = 2\cdot\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 4

a) Es gilt nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1+\sin^2(3x)\right)}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 3x\cos 3x\cdot 3}{(1+\sin^2 3x)(\sin 2x + 2x\cos 2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sin 3x}{\sin 2x + 2x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{18\cos 3x}{2\cos 2x + 2} = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2}\,.$$

b) Es gilt

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{4\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 1}{\tan^{\frac{1}{2}} x - 1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{8(\sin x\cos^3 x - \cos x\sin^3 x)}{\frac{1}{2}\tan^{-\frac{1}{2}} x\cdot\cos^{-2} x} = 0\ .$$

Aufgabe 5

Nach dem Lambertschen Gesetzt gilt

$$B = I_0\cos\alpha\cdot r^{-2} = I_0\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot(h^2+a^2)^{-1} = I_0\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\ .$$

Wir suchen Maximum der Funktion $B : [0,\infty)\to[0,\infty),\ h\to I_0\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$. Es gilt

$$B'(h) = I_0(h^2+a^2)^{-\frac{3}{2}} + I_0 h(-\frac{3}{2})2h(h^2+a^2)^{-\frac{5}{2}} = I_0(h^2+a^2)^{-\frac{5}{2}}(a^2-2h^2).$$

Die Funktion B' hat nur eine Nullstelle $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. Außerdem gilt $B(0)=0$ und $\lim_{h\to\infty}B(h)=0$. Daraus folgt dass die Funktion $B(h)$ hat ein Maximum an der Stelle $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aufgabe 6

Bezeichnen wir mit R den Punkt auf der x-Achse in dem der Lichtstrahl die Achse trifft. Es seien $(0,y_1)$ bzw (x_2,y_2) bzw $(x,0)$ die Koordinaten der Punkte P bzw Q bzw R. Für die Länge des Weges von P nach R gilt $|PR| = \sqrt{(x^2+y_1^2)}$. Ähnlich gilt $|RQ| = \sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}$. Für die Zeit T, die Lichtstrahl braucht von Punkt P zum Punkt Q zu kommen, bekommen wir

$$T = \frac{|PR|}{c_1} + \frac{|RQ|}{c_2} = \frac{\sqrt{(x^2+y_1^2)}}{c_1} + \frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{c_2}\ .$$

Die Koordinaten y_1, x_2, y_2 und die Geschwindigkeiten c_1, c_2 sind fixiert. Die Zeit T ist nur von x abhängig. Wir suchen Minimum der Funktion $T : (-\infty,\infty)\to[0,\infty),\ x\to\frac{\sqrt{(x^2+y_1^2)}}{c_1}+\frac{\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2}}{c_2}$. Es gilt

$$T'(x) = \frac{x}{c_1(x^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x-x_2}{c_2((x-x_2)^2+y_2^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos\alpha}{c_1} - \frac{\cos\beta}{c_2}.$$

Die Funktion $T(x)$ hat ein Minimum an der Stelle x genau dann, wenn

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}\ .$$

Aufgabe 7

a) Die Funktion f ist auf dem gesamten Intervall $[-3,2]$ differenzierbar. In jeder Maximum- oder Minimumstelle im Innern des Intervalls verschwindet daher die Ableitung von f. Es gilt

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2-2)\,.$$

Die Nullstellen von f' lauten 0 und $\pm\sqrt{2}$. Wir müssen neben diesen drei Stellen (die alle im Intervall $[-3,2]$ liegen!) auch die Ränder des Intervalls $[-3,2]$ untersuchen: $f(0)=2$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -2$, $f(-3)=47$, $f(2)=2$. Das Maximum von f ist folglich 47, das Minimum ist -2.

b) Die Funktion g ist außer in 3 differenzierbar. Wir müssen also die Randpunkte von $[0,10]$, den Punkt 3 sowie alle Punkte im Innern von $[0,10] \setminus \{3\}$ untersuchen, an denen die Ableitung von g verschwindet. Auf $[0,3]$ gilt

$$g(x) = -6x + (3-x+2)^2 = -6x + (5-x)^2 = x^2 - 16x + 25\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 16\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 8 \notin [0,3]$. Also hat g' in $[0,3]$ keine Nullstelle. Auf $[3,10]$ gilt

$$g(x) = -6x + (x-1)^2 = x^2 - 8x + 1\,, \qquad \text{also } g'(x) = 2x - 8\,.$$

$g'(x) = 0$ gilt nur für $x = 4 \in (3,10)$. Wir müssen also die Punkte $0, 3, 4, 10$ untersuchen: $g(0) = 25$, $g(3) = -14$, $g(4) = -15$, $g(10) = 21$. Damit ist -15 das Minimum und 25 das Maximum von g.

Aufgabe 8

a) Die durch $f(x) := \ln(1+x)$ definierte Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$ ist beliebig oft differenzierbar. Wegen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f''''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,,$$
$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

sind

$$f(0) = 0\,, \qquad f'(0) = 1\,, \qquad f''(0) = -1\,, \qquad f'''(0) = 2\,, \qquad f''''(0) = -6$$

und für das Taylorpolynom $T_4(f;0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} T_4(f;0)(x) &= \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + x + \tfrac{1}{2!}\,(-1)x^2 + \tfrac{1}{3!}\,2x^3 + \tfrac{1}{4!}\,(-6)x^4 \\ &= x - \tfrac{1}{2}\,x^2 + \tfrac{1}{3}\,x^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\,. \end{aligned}$$

Sei $x \geqslant 0$. Um die Abschätzung $0 \leqslant \ln(1+x) - T_4(f;0)(x) \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ zu zeigen, verwenden wir den Satz von Taylor. Dieser besagt, dass es ein ξ zwischen 0 und x gibt mit

$$f(x) = T_4(f;0)(x) + \frac{f^{(4+1)}(\xi)}{(4+1)!}\,(x-0)^{4+1}\,,$$

also mit

$$f(x) - T_4(f;0)(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5\,.$$

Somit reicht es, die Abschätzung $0 \leqslant \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5}\,x^5$ einzusehen. Diese ist erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \geqslant 0\,, \\ \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5 &= \frac{1}{5!} \cdot \frac{24}{(1+\xi)^5}\,x^5 \leqslant \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(1+0)^5}\,x^5 = \frac{1}{5}\,x^5\,. \end{aligned}$$

b) Die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x} + \frac{1}{1+x}$ ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^3}\,, \qquad f'''(x) = -e^{-x} - \frac{6}{(1+x)^4}\,.$$

Daher sind

$$f(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + \tfrac{2}{3}\,, \qquad f'(\tfrac{1}{2}) = -e^{-1/2} - \tfrac{4}{9}\,, \qquad f''(\tfrac{1}{2}) = e^{-1/2} + 2 \cdot \tfrac{8}{27} = e^{-1/2} + \tfrac{16}{27}$$

und das Taylorpolynom $T_2(f;\frac{1}{2})$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(\frac{1}{2})}{k!}(x-\tfrac{1}{2})^k = f(\tfrac{1}{2}) + f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2 \\ &= e^{-1/2} + \tfrac{2}{3} + (-e^{-1/2} - \tfrac{4}{9})(x-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(e^{-1/2} + \tfrac{16}{27})(x-\tfrac{1}{2})^2\,. \end{aligned}$$

Sei $x \in [0,1]$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein ξ zwischen $\frac{1}{2}$ und x mit

$$f(x) = T_2(f;\tfrac{1}{2})(x) + \frac{f^{(2+1)}(\xi)}{(2+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2+1}\,,$$

also mit

$$\bigl|f(x) - T_2(f;\tfrac{1}{2})(x)\bigr| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}\,|x-\tfrac{1}{2}|^3\,.$$

Wegen $\xi \geqslant 0$ ergibt sich

$$\frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \frac{1}{6}\Bigl(e^{-\xi} + \frac{6}{(1+\xi)^4}\Bigr) = \frac{e^{-\xi}}{6} + \frac{1}{(1+\xi)^4} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{(1+0)^4} = \frac{7}{6}\,;$$

demnach gilt die gewünschte Abschätzung z.B. mit $C = \frac{7}{6}$.