

**Höhere Mathematik I für die Fachrichtung
 Elektrotechnik und Informationstechnik
 Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt**

Aufgabe 1

- a) Für beliebiges $R > 2$ erhalten wir mittels der Substitution $t = \ln x$, $dt = x^{-1} dx$

$$\int_2^R \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{\ln R} \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} \Big|_{\ln 2}^{\ln R} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln R}.$$

Für $R \rightarrow \infty$ strebt dies gegen $(\ln 2)^{-1}$; das uneigentliche Integral konvergiert also und hat diesen Wert.

- b) Seien $s < 0$ und $t \in \mathbb{R}$ fest. Mit partieller Integration erhalten wir für jedes $R > 0$

$$\int_0^R e^{sx} \cos(tx) dx = \frac{e^{sx}}{s} \cdot \cos(tx) \Big|_{x=0}^R + \int_0^R \frac{e^{sx}}{s} \cdot t \sin(tx) dx.$$

Erneute partielle Integration liefert für das letzte Integral

$$\int_0^R \frac{e^{sx}}{s} \cdot t \sin(tx) dx = \frac{e^{sx}}{s^2} \cdot t \sin(tx) \Big|_{x=0}^R - \int_0^R \frac{e^{sx}}{s^2} \cdot t^2 \cos(tx) dx.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right) \int_0^R e^{sx} \cos(tx) dx &= \frac{e^{sx}}{s} \cos(tx) \Big|_{x=0}^R + \frac{e^{sx}}{s^2} t \sin(tx) \Big|_{x=0}^R \\ &= \frac{e^{sR}}{s} \cos(tR) - \frac{1}{s} + \frac{e^{sR}}{s^2} t \sin(tR) - 0 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} -\frac{1}{s}. \end{aligned}$$

(Man beachte $s < 0$.) Also ist das Integral $\int_0^\infty e^{sx} \cos(tx) dx$ konvergent, und es gilt

$$\int_0^\infty e^{sx} \cos(tx) dx = -\frac{1}{s} \left(1 + \frac{t^2}{s^2}\right)^{-1} = -\frac{s}{s^2 + t^2}.$$

Aufgabe 2

- a) i) Da der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert ist, konvergiert das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \ln|x| dx$ genau dann, wenn die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \ln|x| dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \ln|x| dx$$

konvergent sind, also genau dann, wenn die Grenzwerte

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x| dx \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx$$

existieren.

Für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx = \int_{\varepsilon}^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 = (0 - 1) - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} -1.$$

Damit konvergiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x| dx$.

Sei nun $\eta \in (0, 1)$. Mit der Substitution $y = -x$, $dy = (-1) dx$ erkennen wir

$$\int_{-1}^{-\eta} \ln|x| dx = \int_{-1}^{-\eta} \ln(-x) dx = \int_1^{\eta} \ln(y) (-1) dy = \int_{\eta}^1 \ln y dy \xrightarrow{\eta \rightarrow 0^+} -1$$

(siehe oben!). Damit ist auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^0 \ln|x| dx$ konvergent.

Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln|x| dx$ konvergiert und dass gilt:

$$\int_{-1}^1 \ln|x| dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\eta} \ln|x| dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx = -1 - 1 = -2.$$

- ii) Erneut ist der Integrand an der Stelle 0 nicht definiert. Deshalb muss man untersuchen, ob die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

konvergent sind, also ob die Grenzwerte

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\eta} \frac{1}{x} dx \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$$

existieren.

Für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_{\varepsilon}^1 = -\ln \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \infty.$$

Damit ist das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ divergent, so dass auch das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ divergiert.

- iii) Aus der Ungleichung $1 + t \leq e^t$ folgt $\ln(1 + t) \leq t$ für alle $t \geq 0$. Also ist

$$|e^{-t} \ln(1 + t)| \leq te^{-t} \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Da das Integral $\int_0^{\infty} te^{-t} dt$ existiert, konvergiert das zu untersuchende Integral nach dem Majorantenkriterium.

- b) i) Wie in a) i) gesehen, sind $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x| dx = -1$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx = -1$ konvergent. Daher konvergiert auch deren Summe: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\int_{-1}^{-\varepsilon} \ln|x| dx + \int_{\varepsilon}^1 \ln|x| dx) = -1 - 1 = -2$.

- ii) Für jedes $\varepsilon \in (0, 1)$ gilt

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-1}^{-\varepsilon} + [\ln|x|]_{\varepsilon}^1 = \ln \varepsilon - 0 + 0 - \ln \varepsilon = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0.$$

Man beachte: Dieser Grenzwert existiert, obwohl das uneigentliche Integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ divergent ist! Man spricht hier vom sog. Cauchy'schen Hauptwert.

Aufgabe 3

a) Um zu zeigen, dass $A := \{f \in V \mid \exists C > 0 \forall x \in [-1, 1] : |f(x)| \leq C\}$ ein Untervektorraum von V ist, verwenden wir den Satz 14.4:

(i) $A \neq \emptyset$ wegen $f := [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 0 \in A$. (Nehme z.B. $C = 1$)

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in A$. Dann gibt es $C, C' > 0$ mit $|f(x)| \leq C$ und $|g(x)| \leq C'$ für alle $x \in [-1, 1]$. Daher gilt für jedes $x \in [-1, 1]$ $|f(x) + g(x)| \leq C + C'$ und $|\alpha f(x)| \leq |\alpha| |f(x)| \leq |\alpha| C$.

b) Wie zuvor benutzen wir den Satz 14.4, um zu begründen, dass $B := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ ein Untervektorraum von V ist:

(i) $B \neq \emptyset$, weil die Nullabbildung $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ in B liegt.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in B$. Dann gilt

$$1) \quad (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0, \quad \text{also } f + g \in B;$$

$$2) \quad (\alpha f)(0) = \alpha \cdot f(0) = \alpha \cdot 0 = 0, \quad \text{also } \alpha f \in B.$$

c) $C := \{f \in V \mid f \text{ hat mind. eine Nullstelle}\}$ ist kein Untervektorraum von V , weil z.B. die Funktionen

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x \quad \text{und} \quad g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x$$

in C liegen, ihre Summe wegen $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 1, x \in \mathbb{R}$, jedoch nicht.

d) $D := \{f \in V \mid f \text{ ist surjektiv}\}$ ist kein Untervektorraum von V , weil z.B. die Nullfunktion $f(x) = 0$ für alle $x \in [-1, 1]$ nicht in D liegt.

(Wäre D ein Untervektorraum von V , so müsste mit $g \in D$ auch die Nullfunktion $0 \cdot g = 0$ in D liegen!)

Aufgabe 4

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum und V_1, V_2 seien Untervektorräume von V .

a) $V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum von V :

(i) $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 \cap V_2$, also $x, y \in V_1$ sowie $x, y \in V_2$. Dann gilt

$$1) \quad x + y \in V_1 \text{ [da } V_1 \text{ UVR von } V] \text{ und } x + y \in V_2 \text{ [da } V_2 \text{ UVR von } V], \text{ also } x + y \in V_1 \cap V_2.$$

$$2) \quad \alpha x \in V_1 \text{ [da } V_1 \text{ UVR von } V] \text{ und } \alpha y \in V_2 \text{ [da } V_2 \text{ UVR von } V], \text{ also } \alpha x \in V_1 \cap V_2.$$

Nun verwende man Satz 14.4.

b) Gegenbeispiel: Auf dem Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ betrachten wir die durch die Einheitsvektoren $e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorräume

$$V_1 := \text{lin}(\{e_1\}) = \{\alpha e_1 : \alpha \in \mathbb{R}\} \quad \text{sowie} \quad V_2 := \text{lin}(\{e_2\}) = \{\beta e_2 : \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Dann ist $V_1 \cup V_2$ nicht abgeschlossen bezüglich der Addition: In $V_1 \cup V_2$ liegen e_1 und e_2 , nicht aber der Vektor $e_1 + e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$ ist ein Untervektorraum von V :

(i) $V_1 + V_2 \neq \emptyset$, denn $0 \in V_1, 0 \in V_2 \Rightarrow 0 = \underbrace{0}_{\in V_1} + \underbrace{0}_{\in V_2} \in V_1 + V_2$.

- (ii) Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Dann gibt es $x_1, y_1 \in V_1$ sowie $x_2, y_2 \in V_2$ mit $x = x_1 + x_2$ bzw. mit $y = y_1 + y_2$. Es folgt

$$\alpha x + y = \alpha(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\alpha x_1 + y_1)}_{\in V_1} + \underbrace{(\alpha x_2 + y_2)}_{\in V_2} \in V_1 + V_2.$$

Also gilt $\alpha x + y \in V_1 + V_2$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in V_1 + V_2$. Insbesondere sind dann $x + y \in V_1 + V_2$ [mit $\alpha = 1$] sowie $\alpha x \in V_1 + V_2$ [mit $y = 0$].

Nun benutze man Satz 14.4.