Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. W. Reichel
Dr. S. Wugalter

WS 2017/18

Höhere Mathematik I für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zunächst bringen wir A mittels Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \to -\frac{1}{3}Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{3}Z_1 \\ Z_3 \to -\frac{1}{2}Z_3 + \frac{1}{3}Z_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & -1/2 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + \frac{1}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab:

$$\text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1 \end{pmatrix}\} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Folglich ist $\{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ eine Basis von Kern A und es gilt dim Kern $A = 1$. Die Dimensionsformel liefert dim Bild $A = 3 -$ dim Kern $A = 3 - 1 = 2$. Da die beiden Vektoren $Ae_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in$ Bild A linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von Bild A, also

$$\text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Aufgabe 2

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen, die aber einfach ignoriert werden dürfen). Diese Treppe verläuft nicht regelmäßig. Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick. In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen! Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form

$0 \ldots 0 \ -1 \ 0 \ldots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums, und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung! Gemäß Folgerung (1) in 14.11 ergibt sich für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1 + 4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

Wir bringen die erweiterte Matrix $(A|y)$ durch Zeilenumformungen auf Zeilennormalform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \beta+2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & \beta & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 1Z_2]{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & 1 \end{array}\right) =: (*)$$

1. Fall: $\beta \neq 1$. Dann setzen wir zur Abkürzung $\gamma := \frac{1}{(\beta-1)}$ und erhalten

$$(*) \xrightarrow{Z_3 \to (\beta-1)^{-1} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - Z_3]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 - 3\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right)$$

Man sieht: In diesem Fall ist das Gleichungssystem $Ax = y$ eindeutig lösbar; die Lösung $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ ist gegeben durch $x_1 = 2 - 3\gamma$, $x_2 = 1 - \gamma$ und $x_3 = \gamma$.

2. Fall: $\beta = 1$. Dann gilt

$$(*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist größer als der von A. Folglich besitzt das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ in diesem Fall keine Lösung.

Aufgabe 4

a) Diese Abbildung ist linear, denn für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) &= f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7(\lambda x_2 + y_2) \\ i(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) - 4i(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 7x_2 \\ ix_1 + x_2 \\ 3x_1 - 4ix_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7y_2 \\ iy_1 + y_2 \\ 3y_1 - 4iy_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) . \end{aligned}$$

b) Die Abbildung ist nicht linear, denn es gilt $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$. Für eine lineare Abbildung ϕ muss jedoch stets $\phi(\vec{0}) = \phi(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \phi(\vec{0}) = \vec{0}$ gelten.

c) Auch dieses f ist nicht linear, da wieder $f(\vec{0}) \neq 0$ gilt. Man beachte aber: Auch

$$g(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) := xy$$

wäre nicht linear (trotz $g(\vec{0}) = 0$), denn es gilt $g(e_1 + e_2) = 1 \neq 0 + 0 = g(e_1) + g(e_2)$.

d) Entgegen dem ersten Anschein ist f linear. Dies folgt aus Beispiel (1) in 14.15, denn

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= (x - 2i)(y + 3) - (x + 1)(y - 6i) = xy + 3x - 2iy - 6i - (xy - 6ix + y - 6i) \\ &= (3 + 6i)x - (1 + 2i)y = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 + 6i & -1 - 2i \end{pmatrix}}_{=: A \in \mathbb{C}^{1\times 2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wegen $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist ϕ nach Beispiel (1) in 14.15 linear. Es gilt

$$\text{Kern } \phi = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \phi(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ Ax = 0\} = \text{Kern } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} .$$

Letzteres liest man unter Verwendung des (-1)-Ergänzungstricks der Zeilennormalform $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von A ab. Gemäß Definition ist

$$\text{Bild } \phi = \{\phi(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^2\} = \{Ax \ : \ x \in \mathbb{R}^2\} = \text{Bild } A = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} ,$$

weil Bild A der lineare Aufspann der Spalten von A ist.