Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
13. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 5.2.2010, 12.30 Uhr

K 49. Es sei f ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, d.h. $f(z) := c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n, c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$. Ferner existiere ein $r > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \Rightarrow |f(z)| \leq |f(0)|.$$

Beweisen Sie, dass dann $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ gilt, d.h. dass f konstant ist.

K 50.

(a) Beweisen Sie die Orthogonalitätsrelationen ($n, k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} \pi & : k = n \\ 0 & : k \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der 2π-periodischen Funktion f, welche auf $(-\pi, \pi]$ durch $f(x) = |x| \quad (x \in (-\pi, \pi])$ definiert ist.

51. Beweisen Sie die Identität

$$\frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{1}{2}x)} \quad (x \in \mathbb{R}, x \neq 2\pi m, m \in \mathbb{Z})$$

und leiten daraus Sie die Darstellung

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{2\sin(\frac{1}{2}(t-x))}dt$$

für die n-te Partialsumme

$$s_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

der Fourierreihe von f her. Dabei genüge f der Voraussetzung (V) aus der Vorlesung.
Hinweis: Additionstheoreme für $\sin, \cos$ benutzen.

52. Es sei $f(z) := c_n z^n + \ldots + c_0$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten $(n \in N, c_n \neq 0)$ und R derart, dass

$$R \geq 1, \quad \frac{1}{R}\left(\frac{|c_{n-1}|}{|c_n|} + \ldots + \frac{|c_0|}{|c_n|}\right) \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Zeigen Sie: es gilt

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2}|c_n||z|^n \quad (z \in \mathbb{C}, |z| \geq R).$$

Können Sie eine obere Schranke für die Beträge sämtlicher Nullstellen von f angeben?