Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
14. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 12.2.2010, 12.30 Uhr

K 53. Berechnen Sie die Fourierreihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen, welche für $x \in (-\pi, \pi]$ durch

(a) $f(x) = |\sin(x)|$

(b) $f(x) = |\cos(\frac{x}{2})|$

(c) $f(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x \in (-\pi, 0) \\ 1 & : \quad x \in (0, \pi) \\ 0 & : \quad x \in \{0, \pi\} \end{cases}$

(d) $f(x) = \cosh(\alpha x)$, $\alpha \neq 0$.

definiert sind.

K 54. f erfülle die Voraussetzung (V) der Vorlesung. Ferner sei f stetig auf $[-\pi, \pi]$ und *stückweise* C^2, d.h. es existiere eine Zerlegung $\{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[-\pi, \pi]$ $(-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \pi)$ und Funktionen $f_j \in C^2[t_j, t_{j+1}]$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ derart, dass $f_j(x) = f(x)$ für $x \in (t_j, t_{j+1})$ und $j = 0, \ldots, n-1$ gilt. Beweisen Sie: es gibt eine Zahl $C > 0$ derart, dass

$$\max\{|a_k|, |b_k|\} \leq \frac{C}{k^2} \quad (k \in \mathbb{N})$$

für die Fourierkoeffizienten a_k, b_k gilt.

55. f sei in $C^1(\mathbb{R})$ und erfülle die Voraussetzung (V). Beweisen Sie unter Zuhilfenahme der in Aufgabe 51 hergeleiteteten Darstellung der n-ten Partialsumme $s_n(f)$ der Fourierreihe von f, dass

$$\lim s_n(f)(x) = f(x) \quad (x \in [-\pi, \pi])$$

gilt (punktweise Konvergenz der Fourierreihe gegen f). *Hinweis:* leiten Sie zunächst die Darstellung

$$s_n(f)(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t) - 2f(x)] D_n(t) dt$$

mit $D_n(t) := \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(t/2)}$ her. Benutzen Sie den Satz von Riemann-Lebesgue (Satz 13.8 der Vorlesung).

56. Es sei $f(z) = c_n z^n + \ldots + c_0$ ein komplexes Polynom mit $n \geq 1, c_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass f mindestens eine komplexe Nullstelle besitzen muss. Nehmen Sie dazu dass Gegenteil an und verwenden Sie ohne Beweis die Tatsache, dass für $g(z) := 1/f(z)$ das *Maximumsprinzip* gilt: Ist $R > 0$ und gilt $|g(\xi)| \leq |g(0)|$ für alle $\xi \in \mathbb{C}, |\xi| = R$, so ist g konstant.
Hinweis: Aufgabe 52.