Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang

WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
3. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 13.11.2009, 12.30 Uhr

9. Man entscheide jeweils (Beweis oder Gegenbeispiel angeben!), ob (a_n) notwendigerweise eine Nullfolge ist, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

(a) $|a_n| < \sqrt[n]{\varepsilon}$;

(b) $|a_n^2 + a_n| < \varepsilon$;

(c) $|a_n \cdot a_{n+1}| < \varepsilon$;

(d) $|a_n \cdot a_m| < \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

K 10. Beweisen Sie:

(a) Es gilt

$$\frac{1}{m^k}\binom{m}{k} < \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

für $m, n \in \mathbb{N}, m < n, k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq m$. Hinweis: In den Tutorien wurde bereits $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$ gezeigt.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Hinweis: Aufgabenteil a) benutzen.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Hinweis: Benutzen Sie den Binomischen Satz und Aufgabenteil a) für die obere Schranke, ferner die Bernoullische Ungleichung für die untere Schranke.

K 11. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ für $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$;

(b) $b_n = \left(1+\frac{1}{nk}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ fest

(c) $c_n = \left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ fest;

(d) $a_n = \left(1-\frac{1}{nk}\right)^n$ für $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ fest.

12. Gibt es Folgen (a_n), für deren Häufungswerte gilt

(a) $H(a_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ für ein festes $k \in \mathbb{N}$;

(b) $H(a_n) = \mathbb{N}$;

(c) $H(a_n) = \mathbb{Q}$?

Geben Sie jeweils ein Beispiel an oder einen Beweis, daß dies nicht möglich ist.