Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael Plum
Dipl.phys. Vu Hoang WS 2009/10

Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)
4. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben bis Freitag, 20.11.2009, 12.30 Uhr

13. Beweisen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \quad < \quad e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!};$$

(b) e ist irrational. Hinweis: Man nehme an, daß

$$e \in \mathbb{Q} \text{ mit der Darstellung } e = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$$

und führe dies mit Hilfe von Teil (a) zum Widerspruch.

K 14. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine beschränkte Folge positiver Zahlen und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, daß genau einer der beiden Fälle gilt:

(i) $(s_n)_{n\geq 0}$ ist konvergent

(ii) $\forall\, c\in\mathbb{N}\ \exists\, n_0\in\mathbb{N}\ \forall\, n\geq n_0 : s_n > c$.

(b) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{s_n} = 0$.

15.

(a) Beweisen Sie den **Cauchyschen Verdichtungssatz**:
Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergent.}$$

(b) Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$.

K 16. Bestimmen Sie sämtliche Häufungswerte der Folge (a_n):

(a) $a_n := (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{3n+2}$

(b) $a_n := (1 + (-1)^n) \cdot (-1)^{n(n+1)/2}$

(c) $a_n := \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n}$

(d) $a_n := \begin{cases} 1 - 2^{-n} & \text{für n = 3k,} & k \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{n+1}{n} & \text{für n = 3k − 1,} & k \in \mathbb{N} \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} & \text{für n = 3k − 2,} & k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Weisen Sie nach, dass Sie sämtliche Häufungswerte der jeweiligen Folge bestimmt haben.