

## Höhere Mathematik für Informatiker I (Analysis)

### 9. Übungsblatt

Abgabe von 2 K-Aufgaben (und der Zusatzaufgabe) bis Freitag, 8.1.2010, 12.30 Uhr

**33. (Freiwillige Zusatzaufgabe, 8 Punkte)** Wir betrachten die folgende Menge  $\mathcal{E}$  von Funktionen:

$$\mathcal{E} := \{g : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^\alpha (\log x)^\beta e^{P(x)} : \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \\ P(x) := c_1 x^{\gamma_1} + \dots + c_k x^{\gamma_k}, \text{ mit } c_j \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}, \gamma_1 > \dots > \gamma_k > 0\}$$

(a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften von  $\mathcal{E}$ :

- (i) Es gilt  $1 \in \mathcal{E}$  und alle  $g \in \mathcal{E}$  sind positive Funktionen.
- (ii) Für jedes  $g \in \mathcal{E}, g \neq 1$  gilt  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  oder  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ .
- (iii) Sind  $f, g \in \mathcal{E}$ , so ist auch  $f \cdot g, \frac{f}{g} \in \mathcal{E}$  sowie  $f^\lambda \in \mathcal{E}$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(b) Ist  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion und gilt für ein  $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$  und ein  $g \in \mathcal{E}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - cg(x)}{g(x)} = 0,$$

so schreiben wir  $f \sim cg$  ( $x \rightarrow \infty$ ) ( $f$  ist für  $x \rightarrow \infty$  asymptotisch gleich  $cg$ ). Zeigen Sie: gibt es  $g \in \mathcal{E}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $f \sim cg$ , so sind  $c$  und  $g$  eindeutig bestimmt.

(c) Beweisen Sie die folgende asymptotische Entwicklung für  $f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}$ :

$$f(x) - 1 \sim \frac{\log x}{x} \quad (x \rightarrow \infty).$$

Bemerkung: in der  $o$ -Notation liest sich die obige Relation als  $f(x) = 1 + \frac{\log x}{x} + o\left(\frac{\log x}{x}\right)$ .

*Lösungshinweis:* Überzeugen Sie sich zunächst, dass  $\log(1 + \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$  gilt und beachten Sie  $E(\frac{1}{x} \log(1+x)) = E(\frac{\log x}{x} + \frac{\log(1+\frac{1}{x})}{x})$ .

**K 34.** Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen und Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

- (a)  $f_n(x) = \frac{x + nx^2 + nx}{1 + nx}$  auf  $I_1 = [0, \infty)$  bzw. auf  $I_2 = [a, \infty)$  mit einem  $a > 0$
- (b)  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  auf  $I_1 = [0, 1]$  bzw. auf  $I_2 = [\epsilon, 1]$  mit einem festen  $\epsilon \in (0, 1)$
- (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$  auf  $I = \mathbb{R}$
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(1+x+x^2)}$  auf  $I = (-\infty, 0)$

**K 35.** Bestimmen Sie jeweils alle  $x \in D$ , in denen die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese  $x$  die Ableitung  $f'(x)$ .

- (a)  $D = \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 4|^3$
- (b)  $D = (0, \infty), f(x) = x^{(x^x)}$
- (c)  $D = [0, 1], f(x) = (x^2 + 1)e^{x^5}$
- (d)  $D = [0, 1], f(x) = \begin{cases} x^2 g(x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

In Teil (d) sei  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare und beschränkte Funktion.

36. Untersuchen Sie die folgende Funktionenreihe auf gleichmäßige Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**WIR WÜNSCHEN IHNEN EINE FROHE WEIHNACHT UND EIN SCHÖNES  
NEUES JAHR.  
BITTE DENKEN SIE DARAN, SICH FÜR DEN ÜBUNGSSCHEIN  
ANZUMELDEN!**