Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

10. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 11.01.2013, 12.30 Uhr

Aufgabe 37 (K). Untersuchen Sie die nachstehenden Funktionenfolgen und Funktionenreihen in den angegebenen Intervallen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{1+(nx)^2}$ auf $I = \mathbb{R}$

(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{n^3 x}$ auf $I = [0,1]$

(c) $f_n(x) = (cx(1-x))^n$ auf $I = [0,1]$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^2}{(1+x^2)^n}$ auf $I = [0,\infty)$

Aufgabe 38 (K). Bestimmen Sie jeweils alle $x \in I$, in denen die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und berechnen Sie für diese x die Ableitung $f'(x)$.

(a) $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = |x^2-4|^3 + (x^2+1)e^{x^5}$

(b) $I = (0,\infty), \quad f(x) = x^a + x^x + x^{(x^x)} + (x^x)^x + x^{(a^x)} + x^{(x^a)} + a^{(x^x)}$, wobei $a > 0$ fest

(c) $I = \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 + x & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

(d) $I = [0,1), \quad f(x) = \begin{cases} x^2 g(x), & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

In Teil (d) sei $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und beschränkte Funktion.

Aufgabe 39. Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ definiert durch $f(x) = (x^{1/4} + x)\sqrt{x}$.

(a) Zeigen Sie: f ist injektiv und surjektiv.

(b) Berechnen Sie $(f^{-1})'(72)$.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $f(16) = 72$.

bitte wenden!

Aufgabe 40. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ ist gleichmäßig stetig, aber nicht Lipschitz-stetig.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf jedem Intervall $[a, +\infty)$ $(a > 0)$, aber nicht mehr auf $(0, +\infty)$ gleichmäßig stetig.

(c) Eine gleichmäßig stetige Funktion auf einer beschränkten Menge ist beschränkt.

(d) Sei $x_n := 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Definiere $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)x_n & \text{für } \; x = x_n \\ \\ f(x_n) + \dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n) & \text{für } \; x \in [x_n, x_{n+1}] \end{cases} .$$

Dann ist f beschränkt, aber nicht gleichmäßig stetig.

$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$ $\mathcal{F}$rohe $\mathcal{W}$eihnachten und ein gutes $\mathcal{N}$eues $\mathcal{J}$ahr! $\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$

Warum ist ein Krokodil länger als breit?

$\star$

$\ast\ast$

$\ast\ast \uparrow$

$\ast\ast\bullet\ast$

$\circ\ast\ast\ast\uparrow\ast$

$\uparrow\ast\ast\circ\ast\ast\ast\ast$

$\ast\ast\circ\ast\ast\circ\ast\bullet\ast\ast\ast\circ$

$\bigcap$

$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$

$\ast\ast\ast\ast\ast$Man betrachte ein Krokodil. Es ist oben lang und unten lang, aber nur oben grün. Also ist ein Krokodil länger als es grün ist.$\ast\ast\ast\ast$

$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$

$\ast\ast\ast\ast\ast$ Das Krokodil ist grün entlang Länge und Breite, aber nur breit entlang der Breite. Also ist ein Krokodil grüner als breit.$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$

$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$

$\ast\ast\ast\ast\ast$Insgesamt folgt: Das Krokodil ist länger als breit.$\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast\ast$