Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

12. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 25.01.2013, 12.30 Uhr

Aufgabe 45 (K). Die Funktionen *Cosinus hyperbolicus* und *Sinus hyperbolicus* sind definiert durch

$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom n-ten Grades von cosh und sinh in $x_0 = 0$.

(b) Weisen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ nach:

(i) $\cosh(-x) = \cosh(x), \quad \sinh(-x) = -\sinh(x)$

(ii) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(iii) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
$\sinh(x + y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$.

(c) Untersuchen Sie $\cosh : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Monotonie und asymptotisches Verhalten.

(d) Zeigen Sie, dass $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Umkehrfunktionen besitzen. Diese werden Arcosh und Arsinh genannt. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Arcosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1); \quad \operatorname{Arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 46 (K).

(a) Seien $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x$. Bestimmen Sie jeweils die Stelle an der $\max_{x\in(0,\infty)} f(x)$ und $\max_{x\in(0,\infty)} g(x)$ angenommen werden sowie den maximalen Wert von f und g.

(b) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen konstant sind und bestimmen Sie jeweils die Konstante.

- $f(x) = \arctan(x) + \arctan(x^{-1}) \qquad (x > 0)$
- $f(x) = \arccos\left(\frac{3+5\cos x}{5+3\cos x}\right) - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\tan(\frac{1}{2}x)\right) \qquad (0 \leq x < \pi)$

Aufgabe 47.

(a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf $[a, b]$ differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $f'(a) \neq f'(b)$, so gibt es zu jedem Wert η zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \eta$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $f'(a) < 0 = \eta < f'(b)$.

(b) $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ sei stetig auf (a, b) und auf den Intervallen (a, x_0), (x_0, b) differenzierbar ($x_0 \in (a, b)$ fest). Ferner existiere $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$. Beweisen Sie: f ist in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$.

bitte wenden!

Aufgabe 48. Für eine physikalische Größe werden bei n Messungen die Messwerte $a_1, \ldots, a_n$ bestimmt. Als Messergebnis gibt man dann die Zahl a an, die durch

$$f(a) = \min\{f(x) : \ x \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad f(x) := \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$$

definiert wird (*Methode der kleinsten Quadrate*). Berechnen Sie a.