Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. G. Herzog
Dr. M. Radosz

WS 2012/13

Höhere Mathematik I (Analysis) für die Fachrichtung Informatik

13. Übungsblatt

Abgabe bis Freitag, 01.02.2013, 12.30 Uhr

Aufgabe 49.

(a) Ein Unternehmen verkauft pro Monat 1000 Jeans und macht pro verkaufter Hose 30 Euro Gewinn. Umfragen haben ergeben, dass monatlich 100 Menschen mehr eine Jeans kaufen würden, pro Euro, die sie billiger wäre. Das Unternehmen möchte seinen Gewinn maximieren. Wieviel sollte dann eine Jeans kosten?

(b) Ein risikoscheuer Anleger hat in seinem Portfolio zwei verschiedene Aktien A und B in den relativen Anteilen $x_A, x_B \in \mathbb{R},\ x_A + x_B = 1$. Die erwartete Rendite μ_p und das erwartete Risiko σ_p des Portfolios über eine Investitionsperiode sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \mu_A x_A + \mu_B x_B \\ \sigma_p &= \sqrt{x_A^2\sigma_A^2 + x_B^2\sigma_B^2 + 2x_A x_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}, \end{aligned}$$

wobei $\mu_{A/B}$ die erwartete Rendite der Aktie A/B ist, $\sigma_{A/B}$ das erwartete Risiko der Aktie A/B und ρ_{AB} der sogenannte Korrelationskoeffizient zwischen A und B.

Berechnen Sie x_A und x_B, für die das Risiko σ_p minimal ist, in den folgenden Fällen:

(i) $\mu_A = 3;\quad \sigma_A = 3;\quad \mu_B = 2;\quad \sigma_B = 2;\quad \rho_{AB} = \frac{1}{2}$

(ii) $\mu_A = 3;\quad \sigma_A = 3;\quad \mu_B = 2;\quad \sigma_B = 2;\quad \rho_{AB} = -1$

(iii) $\mu_A = 3;\quad \sigma_A = 3;\quad \mu_B = 2.2;\quad \sigma_B = 2;\quad \rho_{AB} = 1.$

Geben Sie ferner die Anteile der Aktien, die erwartete Rendite und das erwartete Risiko des Portfolios an.

Nichtmathematische Zusatzaufgabe: Interpretieren Sie das Ergebnis in (iii) und erklären Sie, wie die risikolose Rendite von 0.6 prinzipiell bewerkstelligt werden kann.

Aufgabe 50 (K).

(a) Sei $f \in C([a,b])$ mit $\int_b^a |f(x)|dx = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

(b) Sei $f \in C([a,b])$. Für alle $g \in C([a,b])$ gelte $\int_b^a f(x)g(x)dx = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

(c) Sei $p \in \mathbb{N}$ und $0 < a < b$. Begründen Sie, dass die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^p$ auf $[a,b]$ integrierbar ist, und bestimmen Sie mit Ober- und Untersummen den Wert des Integrals

$$\int_b^a x^p\ dx.$$

Verwenden Sie dazu die Zerlegungen $Z_n = \{a(b/a)^{\frac{k}{n}} :\ k = 0, 1, ..., n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

bitte wenden!

Aufgabe 51. Sei $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn ein $c \in (a, b)$ existiert, so dass für alle $x \in (a, b)$

$$(f'(c))^2 - 2f(c)f''(x) < 0$$

gilt, dann hat f in (a, b) keine Nullstelle.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz von Taylor mit $n = 1$ und $x_0 = c$ und versuchen Sie einen Widerspruchsbeweis.

Aufgabe 52 (K).

(a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = (\arcsin x)^2$.

(b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sin(e^{t^2})\ dt$. Begründen Sie, dass F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist und bestimmen Sie $F'(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(c) Berechnen Sie mit partieller Integration

$$\int (x^2 + 2x) \sinh x\ dx \qquad \text{und} \qquad \int \arctan x\ dx.$$